Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B21) **12. August 2014**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 72 Punkte erreicht werden.
Zum Bestehen sind mindestens 33 Punkte erforderlich.

Prüfer: Prof. Dr. Martin Rumpf, Dr. Martin Lenz

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen.

Schlüsselwort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	/7	/7	/5	/6	/5	/6	/6
Aufgabe	8	9	10	11	12	13	$\sum$
Punkte	/4	/6	/6	/4	/4	/6	/72

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

a) Definieren Sie für eine Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die Differenzierbarkeit in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$. (2 Punkte)

b) Geben Sie die Einträge der Jacobimatrix von g an. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante für die Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$G(r, h, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cdot h \cdot \cos\vartheta \\ r \cdot h \cdot \sin\vartheta \\ h \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

LÖSUNG:

a) Die Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$, falls es eine lineare Abbildung $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$g(x) = g(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

wobei $o : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $\frac{o(h)}{\|h\|} \to 0$ für $h \to 0$.

b) Die Jacobi-Matrix $B = Dg(x_0)$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$ hat die Einträge b_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ (i Zeilenindex, j Spaltenindex); sie lassen sich schreiben als

$$b_{ij} = \frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j}.$$

c) Es gilt

$$DG(r, h, \vartheta) = \begin{pmatrix} h\cos\vartheta & r\cos\vartheta & -rh\sin\vartheta \\ h\sin\vartheta & r\sin\vartheta & rh\cos\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

und damit

$$\det DG(r, h, \vartheta) = -\,r \cdot h^2 \cdot (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = -\,r \cdot h^2.$$

Aufgabe 2:

a) Wann konvergiert eine Reihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$$

absolut? (2 Punkte)

b) Wir definieren zwei Funktionen mittels ihrer Potenzreihe:

$$\sinh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\cosh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ absolut konvergieren.
Hinweis: Nutzen Sie zum Beispiel das Majorantenkriterium und die Tatsache, dass die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut konvergiert. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln für die Differentiation von Reihen, dass

$$\sinh'(x) = \cosh(x).$$

(2 Punkte)

LÖSUNG:

a) Eine Reihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |c_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert.

b) – Man sieht, dass die Potenzreihe von $\sinh(x)$ die ungeraden und die Potenzreihe von $\cosh(x)$ die geraden Glieder der Exponentialreihe sind. Da die Exponentialreihe absolut konvergiert, konvergieren auch die Teilreihen absolut.

- Alternativ: Da die Exponential-Reihe absolut konvergiert (siehe Vorlesung nach Definition 2.48) können wir die Reihe umordnen und es gilt

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right).$$

  Daher gilt nun für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| &\leq \left(\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \right) \text{ und} \\ \left| \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| &\leq \left(\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \right). \end{aligned}$$

  Aus dem Majorantenkriterium (siehe Vorlesung Satz 2.42) folgt nun die absolute Konvergenz von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sinh(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a) Gegeben seien l Vektoren $w_1, ..., w_l$ aus dem $\mathbb{R}^m$. Definieren Sie, wann diese Vektoren linear unabhängig sind. (2 Punkte)

b) Prüfen Sie, ob die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear abhängig sind:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

LÖSUNG:

a) Die Vektoren heissen linear unbhängig, falls

$$\sum_{i=1}^{l} a_i w_i = 0 \qquad \text{mit } a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, l,$$

impliziert, dass $a_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, l$.

b) Die Vektoren sind linear abhaengig, es ist etwa

$$7w_1 + 2w_3 = w_2.$$

Alternativ: Löse lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + 7c_2 &= 0 && \text{(I)} \\ -2c_1 - 10c_2 + 2c_3 &= 0 && \text{(II)} \\ -2c_2 - c_3 &= 0 && \text{(III)} \\ c_1 + 15c_2 + 2c_3 &= 0 && \text{(IV)} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (I) folgt

$$c_1 = -7c_2$$

und aus Gleichung (III)

$$c_3 = -2c_2.$$

Setzen wir dies in Gleichung (II) und (IV) ein, so erhalten wir $0 = 0$ und damit sind die Vectoren linear abhängig.

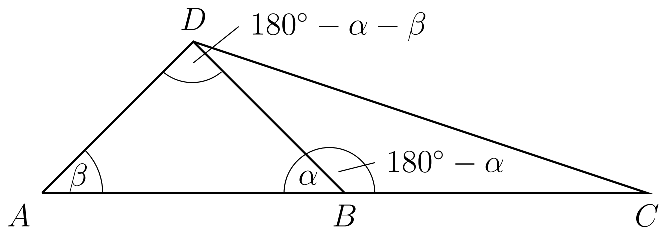
Aufgabe 4: Gegeben seien vier Punkte A, B, C und D, wobei B auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt. Des Weiteren bilden die Punkte A, B und D sowie B, C und D ein Dreieck. Folgende Daten für Längen und Winkel seien bekannt,

$$\begin{aligned} \alpha &= \measuredangle(BD, BA) = 30°, \\ l &= \|A - B\| = \sqrt{3}\,km, \\ r &= \|B - C\| = 1\,km, \quad \text{(Korrektur im Plenum nach Beginn der Klausur)} \\ \beta &= \measuredangle(AB, AD) = 30°. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet etwa $\measuredangle(BD, BA)$ den Winkel am Punkt B im Dreieck ABD. Skizzieren Sie das Netz der beiden Dreiecke. Bestimmen Sie die Entfernung von D zu B und von D zu C. (6 Punkte)

(*Hinweis:* Benutzen Sie, dass $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ sowie $\sin(\gamma) = \cos(\gamma - 90°) = -\cos(\gamma + 90°)$. Lassen Sie Ausdrücke mit Quadratwurzeln stehen. Die Rechnung kann dann ohne Taschenrechner durchgeführt werden!)

LÖSUNG:



Zuächst bestimmen wir die Entfernung von D zu B mittels des Sinussatzes.
Es gilt:

$$\frac{\|B - D\|}{\sin(\beta)} = \frac{\|A - B\|}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

$$\Rightarrow \quad \|B - D\| = \frac{\|A - B\| \sin(\beta)}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \sqrt{3}\frac{\sin(30°)}{\sin(120°)} = \sqrt{3}\frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \sqrt{3}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

Nun bestimmen wir die Entfernung von D zu C mittels des Kosinussatzes und der eben berechneten Entfernung von D zu B.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \|D - C\|^2 &= \|B - C\|^2 + \|B - D\|^2 - 2\|B - C\|\|B - D\| \cos(180° - \alpha) \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(180° - 30°) \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(150°) \\ &= 2 - 2 \cdot (-\sin(60°)) \end{aligned}$$

$$= 2 - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

Aufgabe 5: Gegeben sei eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x) = Bx \quad \text{wobei } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig? (5 Punkte)

LÖSUNG:

- Die Zeilenvektoren sind linear abhängig, es gilt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Die Spaltenvektoren sind linear abhängig, da die zweite Spalte identisch der dritten Spalte ist.

- $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathbb{R}^4$ ist zweidimensional. Es gilt etwa

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 &\Rightarrow \qquad \underline{x_2 = 3x_4 - x_3}, \\ x_1 + x_4 = 0 &\Rightarrow \qquad \underline{x_1 = -x_4}, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. & \end{aligned}$$

  Einsetzen von $x_1 = -x_4$ und $x_2 = 3x_4 - x_3$ in die dritte Gleichung ergibt

$$0 = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5x_4 + 3x_4 - x_3 + x_3 + 2x_4 = 0.$$

  Somit ist der Kern von B

$$\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Da $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und der Kern von B Dimension 2 hat, folgt aus der Dimensionsformel (siehe Vorlesung Folgerung 4.19)

$$4 = 2 + \dim \mathrm{Bild}\, B \Rightarrow \dim \mathrm{Bild}\, B = 2.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Die zweite und dritte Spalte sind identisch und die erste Spalte ist 3 Mal die zweite Spalte plus die vierte Spalte, d.h. es gilt zwei linear unabhängige Spaltenvektoren und somit ist die Dimension des Bildes von B 2. Daher gilt:

$$\mathrm{Bild}(B) = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 6: a) Eine 3×3-Matrix B besitzt eine L-R-Zerlegung,

$$B = LR,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{11} & 1 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Wie berechnet man mit dieser Zerlegung die Determinante von B? (2 Punkte)

b) Berechnen Sie unter Erzeugung einer L-R-Zerlegung die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Hinweis: Es entstehen ganzzahlige Einträge für die Matrizen L und R.

LÖSUNG:

a) Es gilt

$$\det B = \det(L \cdot R) = \det L \cdot \det R = 1 \cdot (r_{11} r_{22} r_{33}).$$

b) Zunächst berechnen wir die L–R–Zerlegung: Es gilt

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Durch die folgenden Zeilenoperationen II - I und IV - 2I erhalten wir

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Zeilenoperation III - II erhalten wir

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Zeilenoperation IIII - 2 III erhalten wir

$$B^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$R = B^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$L = L^{(1)}L^{(2)}L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir nun die Determinante von B berechnen:

$$\det B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Aufgabe 7:

a) Geben Sie die Matrix B an, die einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ um einen Winkel β gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung bezüglich der Ebene E, aufgespannt durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, dreht. (2 Punkte)

b) Geben Sie die lineare Abbildung g an, die die Projektion im $\mathbb{R}^2$ auf die Gerade

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | n \cdot x = 0\}$$

beschreibt, wobei $n \in \mathbb{R}^2$ mit $\|n\| = 1$.
Wie sieht die Matrix P zu dieser Projektion bezogen auf die kanonische Basis $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ aus, falls $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$? (4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Diese Drehung ist also identisch zur Drehung im $\mathbb{R}^2$ nur das die z-Koordinate festgehalten wird, d.h.

$$B = \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Die lineare Abbildung g ist:

$$g(x) = x - (x \cdot n)n \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Die Berechnung der Matrix P folgt durch

$$\begin{aligned}
g(x) &= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x_1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\\ x_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.h.

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4).$$

(4 Punkte)

LÖSUNG:

Induktionsanfang: $n = 1$, $2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 2$.

Induktionsbehauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$

Induktionsschritt: Zu zeigen $n \to n+1$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+6).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+4) + 6(n+2)\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 10n + 12\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+6).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Grenzwerte der untenstehenden Folgen.

a) $a_n = 3 - \frac{1}{n^2}$, (2 Punkte)

b) $b_n = \frac{n^3-7n^2+3n-1}{2n^3+5n^2+5}$, (2 Punkte)

c) $c_n = \frac{4n^2+n-5}{(2n-\sqrt{n})^2}$. (2 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{1}{n^2} = 3.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 7n^2 + 3n - 1}{2n^3 + 5n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^3}} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + n - 5}{(2n - \sqrt{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + n - 5}{4n^2 - 2n\sqrt{n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{4 - 2\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = 1.$$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $w(t) = (t^2 + 3)^{-7}$, (2 Punkte)

b) $c(z) = \frac{\sin(z^2+z)}{\cos(z^2+z)}$, (2 Punkte)

c) $m(x) = \exp(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2})$. (2 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$w'(t) = -7 \cdot (t^2 + 3)^{-8} \cdot 2t = -14t(t^2 + 3)^{-8}.$$

b)

$$\begin{aligned} c'(z) &= \frac{\cos(z^2 + z) \cdot (2z + 1) \cdot \cos(z^2 + z) - \sin(z^2 + z) \cdot (2z + 1) \cdot (-\sin(z^2 + z))}{\cos^2(z^2 + z)} \\ &= \frac{2z + 1}{\cos^2(z^2 + z)}. \end{aligned}$$

c)

$$m'(x) = -\frac{2(x - x_0)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right).$$

Aufgabe 11: Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$h(y) = \sin^2(y).$$

(4 Punkte)

LÖSUNG: Berechnug der ersten und zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} h'(y) &= 2\sin(y)\cos(y), \\ h''(y) &= 2(\cos^2(y) - \sin^2(y)). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin(y)\cos(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(y) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = k\pi \quad \text{oder} \quad y = k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bestimmung ob Minimum oder Maximum:

- $y = k\pi$:

$$h''(k\pi) = 2(\cos^2(k\pi) - \sin^2(k\pi)) = 2 > 0 \Rightarrow \qquad \text{Minimum.}$$

- $y = k\pi + \frac{\pi}{2}$:

$$h''\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\cos^2\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -2 < 0 \Rightarrow \qquad \text{Maximum.}$$

Aufgabe 12: Skizzieren Sie den Verlauf der folgenden Kurve in $\mathbb{R}^2$.

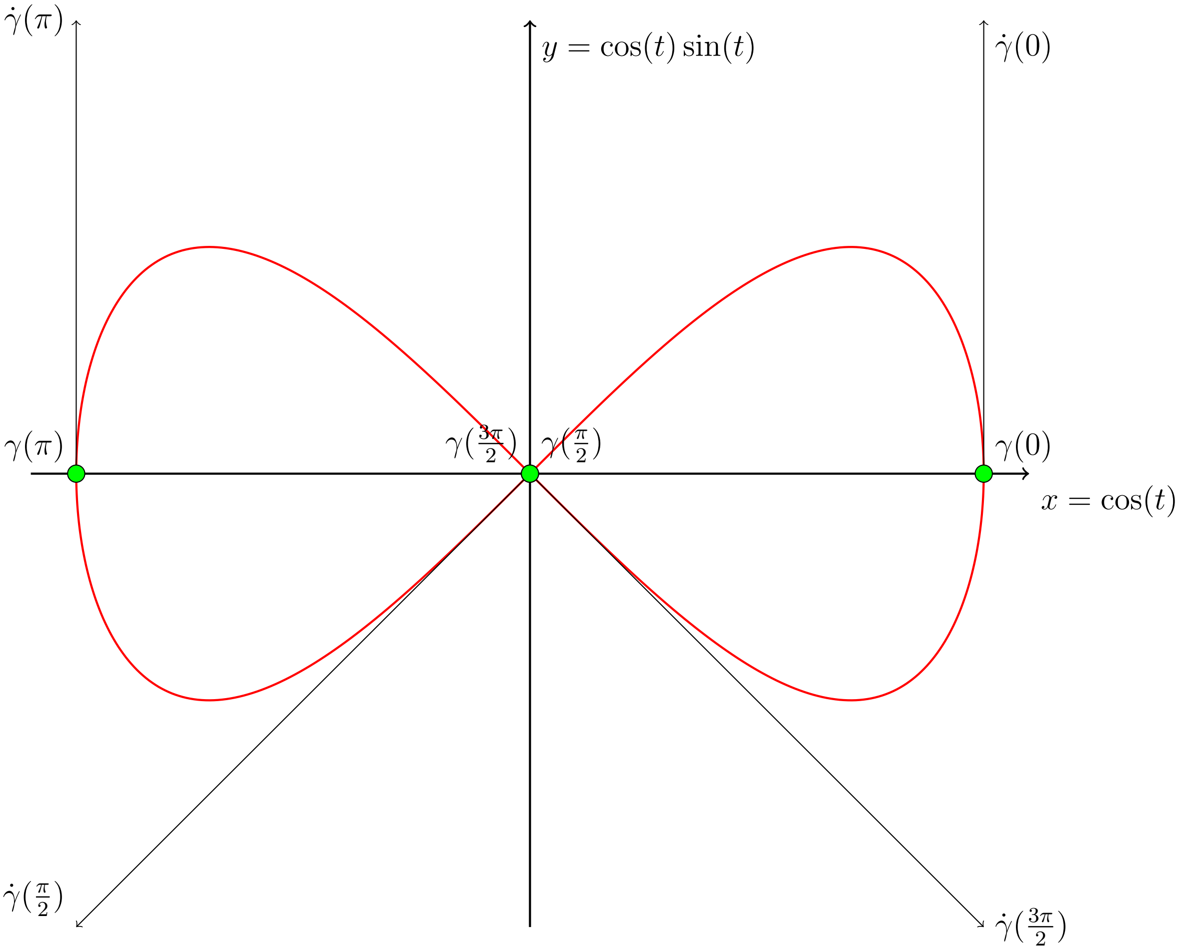
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)\sin(t) \end{pmatrix},$$

für $t \in [0, 2\pi)$. Berechnen Sie hierzu zunächst $\dot{\gamma}(t)$ und werten Sie dann $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ für $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ aus. (4 Punkte)

LÖSUNG: Berechnung von $\dot{\gamma}(t)$:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\sin^2(t) + \cos^2(t) \end{pmatrix}$$

- $t = 0: \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad t = \frac{\pi}{2}: \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
- $t = \pi: \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad t = \frac{3\pi}{2}: \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
- $t = 2\pi: \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$



Aufgabe 13:

a) Geben Sie die Definition einer Norm $\|.\|_g$ zu einem gegebenen Skalarprodukt $g(.,.)$ an. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie die folgende Relation (Parallelogrammidentität):

$$\|x+y\|_g^2 = 2\|x\|_g^2 + 2\|y\|_g^2 - \|x-y\|_g^2$$

(Korrektur im Plenum nach Beginn der Klausur)

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a) Es gilt

$$\|x\| = \|x\|_g = \sqrt{g(x,x)}.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
2\|x\|_g^2 + 2\|y\|_g^2 - \|x-y\|_g^2 &= 2g(x,x) + 2g(y,y) - g(x-y, x-y) \\
&= 2g(x,x) - g(x-y,x) + 2g(y,y) + g(x-y,y) \\
&= g(2x-x+y, x) + g(2y+x-y, y) \\
&= g(x+y,x) + g(y+x,y) \\
&= \|x+y\|_g^2.
\end{aligned}$$