Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B21) **31. März 2014**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 69 Punkte erreicht werden.
Zum Bestehen sind mindestens 30 Punkte erforderlich.

Prüfer: Prof. Dr. Martin Rumpf, Dr. Martin Lenz

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen.

Schlüsselwort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	/7	/5	/5	/6	/5	/5	/6
Aufgabe	8	9	10	11	12	13	$\sum$
Punkte	/4	/6	/6	/4	/4	/6	/69

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Definieren Sie für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Differenzierbarkeit in einem Punkt. (2 Punkte)

b) Geben Sie die Einträge der Jacobimatrix an. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante für die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Lösung: a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst differenzierbar in dem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls

b) Die Jacobi-Matrix $A = Df(x_0)$ hat die Einträge a_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ (i Zeilenindex, j Spaltenindex); sie lassen sich schreiben als

$a_{ij} =$

c) Es ergibt sich

$Df(r, \theta, \phi) =$

und damit

$\det Df(r, \theta, \phi) =$

Aufgabe 2: a) Geben Sie die Definition von $\sin, \cos, \exp$ als Potenzreihen an. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie mithilfe der Regeln für die Differentiation von Reihen, dass

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

(2 Punkte)

Lösung: a)

$\exp(x) =$

$\sin(x) =$

$\cos(x) =$

b)

Aufgabe 3: a) Gegeben seien k Vektoren $v_1, ..., v_k$ aus dem $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie, wann diese Vektoren linear unabhängig sind. (2 Punkte)

b) Prüfen Sie ob die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Lösung: a) Die Vektoren heissen linear unbhängig, falls

b)

Aufgabe 4: Gegeben sei ein Dreieck ABC in der Ebene sowie ein Punkt D über der Seite BC. Folgende Daten für Längen und Winkel seien bekannt,

$$\alpha = \measuredangle(AB, AC) = 60°, \tag{1}$$
$$l = \|A - B\| = 5\,km, \tag{2}$$
$$r = \|A - C\| = 6\,km, \tag{3}$$
$$\beta = \measuredangle(BD, BC) = 60°, \tag{4}$$
$$\gamma = \measuredangle(CB, CD) = 30°. \tag{5}$$

Hier bezeichnet etwa $\measuredangle(BD, BC)$ den Winkel am Punkt B im Dreieck CBD. Skizzieren Sie das Netz der beiden Dreiecke mit den gegebenen Daten. Bestimmen Sie die Entfernung von D zu C und von D zu B. (6 Punkte)

(*Tip:* Benutzen Sie, dass $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Lassen Sie Ausdrücke mit Quadratwurzeln stehen. Die Rechnung kann dann ohne Taschenrechner durchgeführt werden.)

Lösung:

Aufgabe 5: Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig? (5 Punkte)

Lösung:

$$\left[\; f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

Aufgabe 6: a) Eine 2×2-Matrix A besitzt eine L-R-Zerlegung,

$$A = LR,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Wie berechnet man mit dieser Zerlegung die Determinante von A? (2 Punkte)

b) Berechnen Sie unter Erzeugung einer L-R-Zerlegung die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Hinweis: Es entstehen ganzzahlige Einträge für die Matrizen L und R.

Lösung:

a) $\det A =$

b) siehe nächste Seite

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$

$\det A =$

Aufgabe 7: a) Geben Sie die Matrix A an, die einen Vektor um einen Winkel α gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ dreht. (2 Punkte)

b) Geben Sie die lineare Abbildung f an, die die Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | n \cdot x = 0\}$$

beschreibt, für einen Vektor $n \in \mathbb{R}^2$ mit $\|n\| = 1$.
Wie sieht die Matrix B zu dieser Spiegelung bezogen auf die kanonische Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ aus, falls $n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$? (4 Punkte)

Lösung:

a)

$A =$

b)

$f(x) =$

$B =$

Aufgabe 8: Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

(4 Punkte)

Lösung:

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Grenzwerte der untenstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, (2 Punkte)

b) $b_n = \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$, (2 Punkte)

c) $c_n = \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$. (2 Punkte)

Lösung:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n =$

b) $\lim_{n\to\infty} b_n =$

c) $\lim_{n\to\infty} c_n =$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen,

a) $q(u) = (u^2 - 5)^8$, (2 Punkte)

b) $r(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2+1}}$, (2 Punkte)

c) $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. (2 Punkte)

Lösung:

a)

$q'(u) =$

b)

$r'(z) =$

c)

$e_n'(x) =$

Aufgabe 11: Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x + 18}.$$

(4 Punkte)

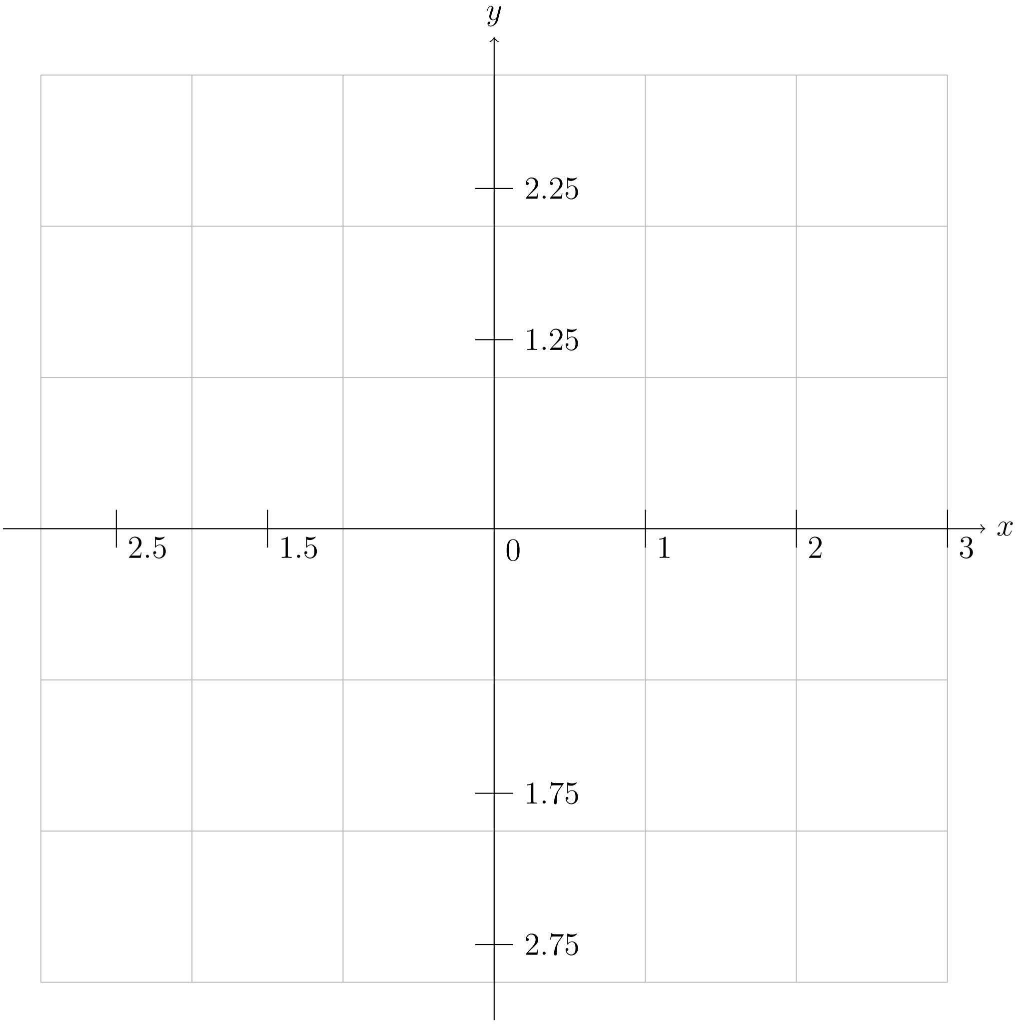
Lösung:

Aufgabe 12: Skizzieren Sie den Verlauf der folgenden Kurve in $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \end{pmatrix},$$

für $t \in [1, 3]$. (4 Punkte)

Lösung:



Aufgabe 13: a) Geben Sie die Defintion eines Skalarprodukts an. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie die folgende Relation (3. Binomische Formel),

$$g(x + y, x - y) = g(x, x) - g(y, y).$$

(2 Punkte)

Lösung:

a) Eine Abbildung $g : V \times V \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$ - Vektorraum V heisst Skalarprodukt, falls

(G1)

(G2)

(G3)

b)

$g(x + y, x - y) =$