Aufgabe 1: a) Definieren Sie für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Differenzierbarkeit in einem Punkt. (2 Punkte)

b) Geben Sie die Einträge der Jacobimatrix an. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante für die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Lösung: a) Die Funktion f heisst differenzierbar in dem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls

es eine lineare Abbildung $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

wobei $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Funktion mit $\frac{o(h)}{\|h\|} \to 0$ für $h \to 0$.

b) Die Jacobi-Matrix $A = Df(x_0)$ hat die Einträge a_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ (i Zeilenindex, j Spaltenindex); sie lassen sich schreiben als

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_0).$$

c) Es ergibt sich

$$Df(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$\det Df(r,\theta,\phi) =$

$$r^2\sin^3\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi$$
$$+ r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi = r^2\sin^3\theta + r^2\cos^2\sin\theta$$
$$= r^2\sin\theta.$$

Aufgabe 2: a) Geben Sie die Definition von $\sin, \cos, \exp$ als Potenzreihen an. (3Punkte)

b) Zeigen Sie mithilfe der Regeln für die Differentiation von Reihen, dass

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

(2 Punkte)

Lösung: a)

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

b)

$$\cos'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= -\sin(x)$$

Aufgabe 3: a) Gegeben seien k Vektoren $v_1, ..., v_k$ aus dem $\mathbb{R}^n$. Definieren Sie, wann diese Vektoren linear unabhängig sind. (2Punkte)

b) Prüfen Sie ob die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Lösung: a) Die Vektoren heissen linear unbhängig, falls

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, k$$

impliziert dass $a_i = 0$ für alle $i = 1, 2, \dots k$

b)

Die Vektoren sind linear abhängig, man hat zum Beispiel

$$3v_1 + 5v_2 - v_3 = 0.$$

Zur Kontrolle:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -20 \end{pmatrix} = 12 + 8 - 20 = 0.$$

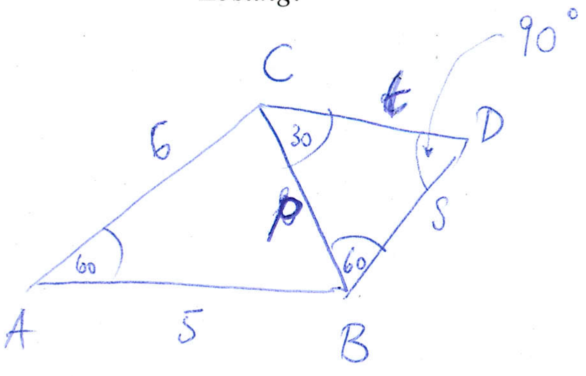
Aufgabe 4: Gegeben sei ein Dreieck ABC in der Ebene sowie ein Punkt D über der Seite BC. Folgende Daten für Längen und Winkel seien bekannt,

$$\alpha = \measuredangle(AB, AC) = 60°, \tag{1}$$
$$l = \|A - B\| = 5\,km, \tag{2}$$
$$r = \|A - C\| = 6\,km, \tag{3}$$
$$\beta = \measuredangle(BD, BC) = 60°, \tag{4}$$
$$\gamma = \measuredangle(CB, CD) = 30°. \tag{5}$$

Hier bezeichnet etw $\measuredangle(BD, BC)$ den Winkel am Punkt B im Dreieck CBD. Man bestimme die Entfernung von D zu C und von D zu B. (6 Punkte)

(*Tip:* Benutzen Sie, dass $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Lassen Sie Ausdrücke mit Quadratwurzeln stehen. Die Rechnung kann dann ohne Taschenrechner durchgeführt werden.)

Lösung:



$$p^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \overbrace{\cos 60°}^{=1/2}$$

$$= 36 + 25 - 30 = 31$$

$$t = \sin 60° \, \frac{p}{\underbrace{\sin 90°}_{=1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{31}$$

$$s = \underbrace{\sin 30°}_{=1/2} \cdot p = \frac{1}{2}\sqrt{31}.$$

Aufgabe 5: Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig? (5 Punkte)

Lösung:

•) Die Zeilenvektoren sind linear abhängig als 4 Vektoren in $\mathbb{R}^3$, etwa $(1\,0\,1) - (1\,0\,1) = 0$.

•) Die Spaltenvektoren sind l. a., man hat

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

•) $\ker(A) \subset \mathbb{R}^3$ ist eindimensional:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \quad \text{nach Addition,}$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\underbrace{\begin{aligned} x_2 &= -2x_3 \\ x_1 &= -x_3 \end{aligned}}$$

$$\ker A = \{ (x_1, x_2, x_3) : \qquad , \; x_3 \in \mathbb{R} \}$$

•) $\operatorname{bild} A \subset \mathbb{R}^4$ ist zweidimensional, etwa

$$\operatorname{bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left[\ f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ \right]$$

Aufgabe 6: a) Eine 2×2-Matrix A besitzt eine L-R-Zerlegung,

$$A = LR,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Wie berechnet man mit dieser Zerlegung die Determinante von A? (2 Punkte)

b) Berechnen Sie unter Erzeugung einer L-R-Zerlegung die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

(3Punkte)

Hinweis: Es entstehen ganzzahlige Einträge für die Matrizen L und R.

Lösung:

a) $\det A = \det L \cdot \det R$

$= 1 \cdot r_{11} r_{22}$

b) siehe nächste Seite

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 3 & 4 \\ & & 3 & 4 \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 12 & 20 \end{matrix}$$

$$R = A^{(4)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & 0 & 3 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & IV - 2\,III \end{matrix}$$

$$C^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & 2 & 3 & 4 & II - I \\ 0 & 2 & 6 & 8 & \\ 0 & 0 & 6 & 12 & IV - 2\,I \end{matrix}$$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 2 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & 0 & 3 & 4 & III - II \\ 0 & 0 & 6 & 12 & \end{matrix}$$

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A =$ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Aufgabe 7: a) Geben Sie die Matrix A an, die einen Vektor um einen Winkel α gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ dreht. (2 Punkte)

b) Geben Sie die lineare Abbildung f an, die die Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | n \cdot x = 0\}$$

beschreibt, für einen Vektor $n \in \mathbb{R}^2$ mit $\|n\| = 1$.
Wie sieht die Matrix B zu dieser Spiegelung bezogen auf die kanonische Basis $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ aus, falls $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$? (4 Punkte)

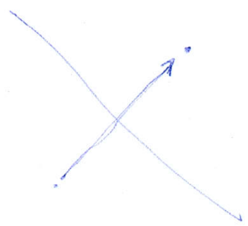
Lösung:

a)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

b)

$$f(x) = x - 2(x \cdot n)\, n$$



$$B = \quad f(x) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - (x_1 - x_2) \\ x_2 + (x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

(4 Punkte)

Lösung:

•) $n = 1$: $\qquad 1^2 = \frac{1}{6}\, 1 \cdot 2 \cdot 3$

•) $(*)$ angenommen, finden wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + n^2 + 2n + 1$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1,$$

sowie

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)\big(\underbrace{2(n+1)+1}_{2n+3}\big)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2n^3 + (2+4+3)n^2 + (4+3+6)n + 6\right)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1. \qquad \square$$

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Grenzwerte der untenstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, (2 Punkte)

b) $b_n = \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$, (2 Punkte)

c) $c_n = \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$. (2 Punkte)

Lösung:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n =$ 2

b) $\lim_{n\to\infty} b_n =$ $\lim \dfrac{-7 + 3/n - 1/n^2}{5 + 5/n^2} = -7/5$

c) $\lim_{n\to\infty} c_n =$ $\lim \dfrac{3 + 1/n^2 - 2/n^3}{(2 + 1/\sqrt{n})^3} = 3/8$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen,

a) $q(u) = (u^2 - 5)^8$, (2 Punkte)

b) $r(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2+1}}$, (2 Punkte)

c) $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. (2 Punkte)

Lösung:

a)

$$q'(u) = 8(u^2-5)^7 \cdot 2u = 16(u^2-5)^7$$

b)

$$r'(z) = \frac{\frac{2z}{2\sqrt{z^2-1}} \cdot \sqrt{z^2+1} - \sqrt{z^2-1} \cdot \frac{2z}{2\sqrt{z^2+1}}}{z^2+1}$$

$$= \frac{z(z^2+1) - (z^2-1)z}{\sqrt{z^2-1}\sqrt{z^2+1}(z^2+1)} = \frac{2z}{(z^2-1)^{1/2}(z^2+1)^{3/2}}$$

c)

$$e_n'(x) = n\left(1+x/n\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \left(1+x/n\right)^{n-1}$$

Aufgabe 11: Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 3\cancel{x}+18}$$

(4 Punkte)

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{3x^2-3}{(x^3-3x+18)^2}$$

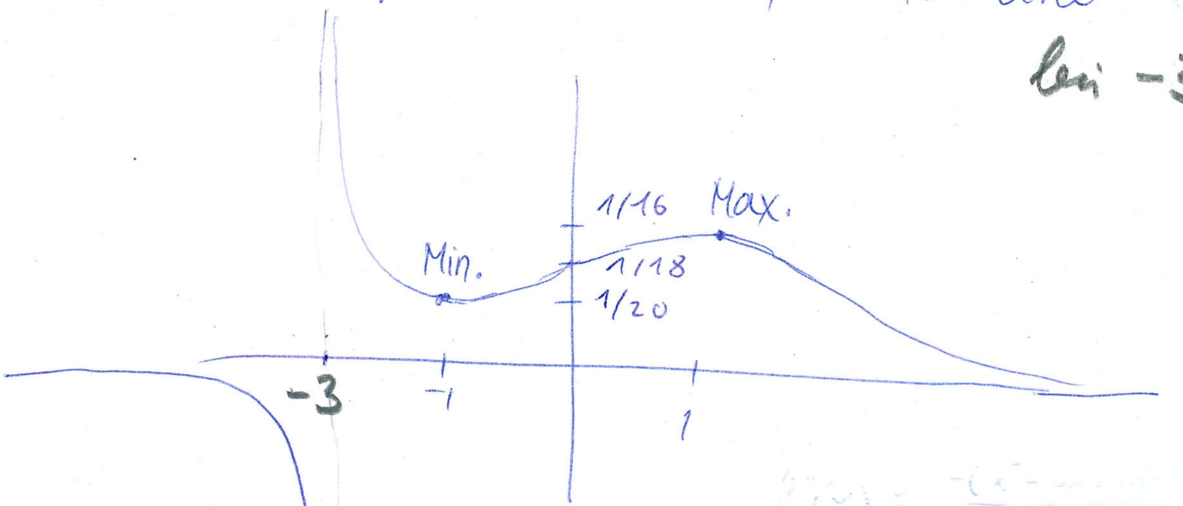
Extrema liegen bei $x = \pm 1$.

Es ist ferner $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$f(1) = \frac{1}{1-3+18} = \frac{1}{16}$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+3+18} = \frac{1}{20}.$$

f hat schließlich Polstellen, nämlich eine bei -3



$$f''(x) = \frac{-(x^3-3x+18)^2\cdot 6x + (3x^2-3)\cdot 2(x^3-3x+18)\cdot(3x^2-3)}{(x^3-3x+18)^4}$$

$$f''(1) = \frac{-16^2\cdot 6+0}{16^4} = -\frac{6}{16^2} < 0$$

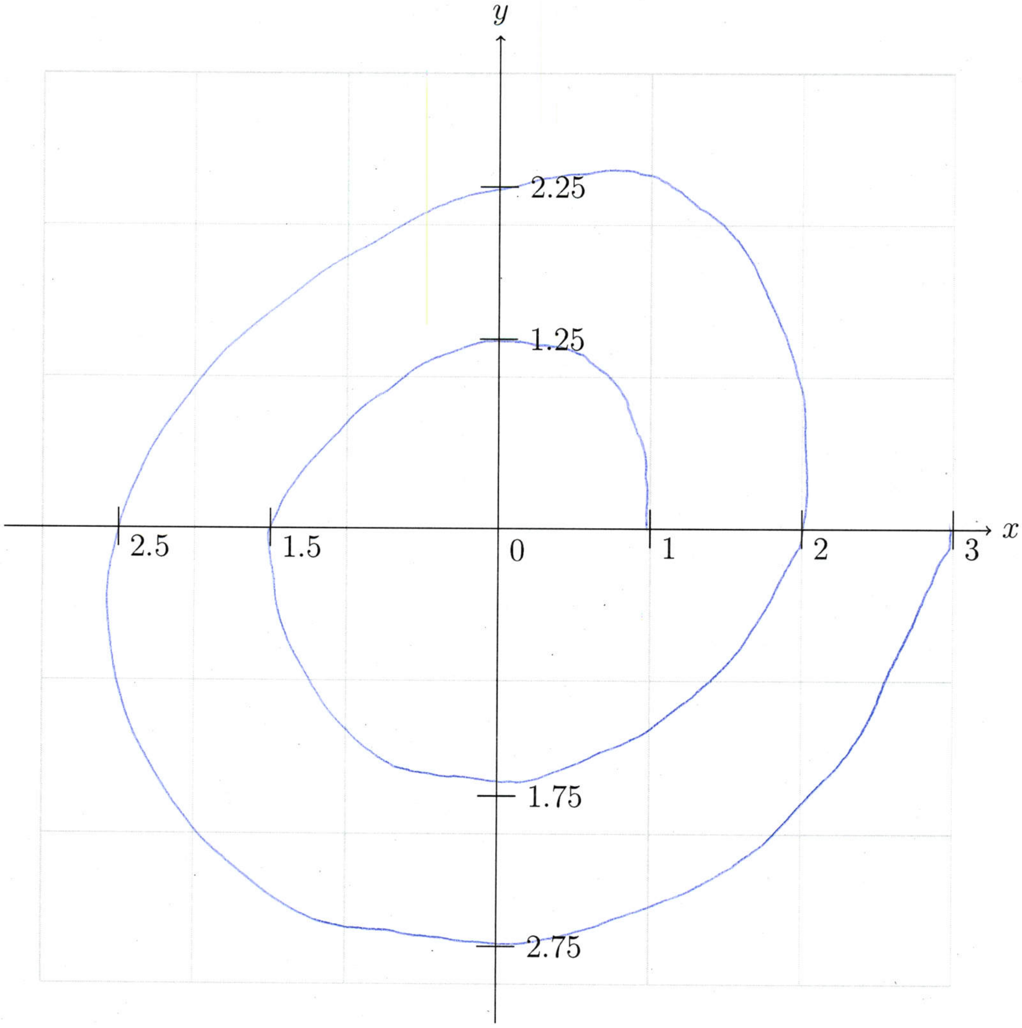
$$f''(-1) = \frac{-20^2\cdot(-6)+0}{20^4} = \frac{6}{20^2} > 0$$

Aufgabe 12: Skizzieren Sie den Verlauf der folgenden Kurve in $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \end{pmatrix},$$

für $t \in [1,3]$. (4 Punkte)

Lösung:



Aufgabe 13: a) Geben Sie die Defintion eines Skalarprodukts an. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie die folgende Relation (3. Binomische Formel),

$$g(x+y, x-y) = g(x,x) - g(y,y).$$

(2 Punkte)

Lösung:

a) Eine Abbildung $g : V \times V \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$ - Vektorraum V heisst Skalarprodukt, falls

(G1) sie bilinear ist: $g(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha g(x_1, y) + g(x_2, y)$

(G2) symmetrisch: $g(x,y) = g(y,x)$

(G3) positiv definit ist: $g(x,x) \geq 0$

und $g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

b)

$g(x+y, x-y) = g(x, x-y) + g(y, x-y)$

$= g(x,x) \underbrace{- g(x,y) + g(y,x)}_{=0 \text{ gemäß (G2)}} - g(y,y)$

$= g(x,x) - g(y,y)$

$\square$