Aufgabe 13: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

d) $n! \geq 2^{n-1}$.

Aufgabe 14: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$;

b) $a_n := \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$;

c) $a_n := (1+\frac{1}{n^2})^n$;

Tipp: Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung einmal auf a_n und einmal auf $\frac{1}{a_n}$ an und zeigen Sie damit, dass

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

und

$$a_n \leq 1 + \frac{n}{n^2-n+1}$$

gelten.

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser beiden Folgen.

d) $a_n := \frac{n}{2n+\sin(\frac{1}{n})}$.

Aufgabe 15: Zeigen Sie, dass die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für alle $0 \leq x \leq 1$ konvergiert.
Tipp: Vergleichen Sie mit der Folge $g_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ und verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 13d) sowie die Eigenschaft monotoner Folgen.
Bemerkung: Später werden Sie erkennen, dass die zugehörige Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und die Exponentialfunktion e^x darstellt.