Aufgabe 23: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und ihre Ableitung f' sei stetig.

i) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x)\,.$$

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebisses aus i), dass auch

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

gilt.

Tipp: Addieren Sie im Zähler $0 = -f(x) + f(x)$.

Bemerkung: Der Differenzenquotient aus i) wird als Rückwärtsdifferenzenquotient bezeichnet, der aus ii) $(\Delta_{2h}f)(x) := \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ als zentraler oder symmetrischer Differenzenquotient von f. Für stetig differenzierbare Funktionen gilt also, dass die Ableitung auch durch den Rückwärts- und den zentralen Differenzenquotienten approximiert wird.

Aufgabe 24: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, d.h. die Funktion f selber ist differenzierbar und ihre erste Ableitung f' stetig. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle x, dann hat f an der Stelle $x = a$ ein Minimum.

b) Ist f streng monoton wachsend, dann gilt für alle x die Ungleichung $f'(x) > 0$.

c) Hat f ein Minimum an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

d) Hat f ein Minimum an der Stelle $x_0 \in [a,b]$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

e) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

f) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, so ist f entweder konstant oder es gibt ein $\xi \in (a,b)$, so dass f an der Stelle ξ ein Maximum oder ein Minimum hat.

Aufgabe 25: Berechnen Sie $\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right)$ für die Funktion $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen $\{(x,y,z) \mid u(x,y,z) = R\}$?

Aufgabe 26: Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n} \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n} \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Tipp: Zeigen Sie $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$ für alle $n \geq 1$