Aufgabe 27: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} & \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \\ \text{und} \quad & \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipp: Vergleichen Sie hierzu die Herleitung der Formel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ aus der Vorlesung und definieren Sie

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x+y) - (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\ h(x) &= \cos(x+y) - (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.) \end{aligned}$$

Betrachten Sie beide Gleichungen gemeinsam und verwenden Sie: Gilt für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$: $g(x)^2 + h(x)^2 = 0$, dann folgt $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$.

Aufgabe 28: Berechnen Sie die ersten beiden Näherungen der folgenden Funktionen nach dem Newton-Verfahren $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, ($n \in \mathbb{N}$).
a) Für die affin-lineare Funktion $f(x) = 2x + 6$ im Intervall $[-4, 0]$ mit $x_0 = -1$ als Startwert.
b) Für die quadratische Funktion $q(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[0, 3]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.
c) Für die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ im Intervall $[-3, 4]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.

Aufgabe 29: Seien zwei Geraden definiert duch

$$\begin{aligned} G_1 &:= \{(x, y) | y = 7x\} \\ G_2 &:= \{(x, y) | y = 5x + 3\} \end{aligned}$$

i) Zeichnen Sie die beiden Geraden.

ii) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

iii) Geben Sie zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_2$ an, so dass gilt $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin G_2$.

iv) Zeigen Sie, dass für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1$ gilt

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in G_1 \tag{1}$$

$$(\alpha x_1, \alpha y_1) \in G_1 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$