Aufgabe 30: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

b) $\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

c) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

d) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$ ja ☐ nein ☐

e) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$ ja ☐ nein ☐

Aufgabe 31: Eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ ist (analog zum $\mathbb{R}^2$) gegeben durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $r \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ mittels

$$G = \{x + \alpha r \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, um den Schnitt von G mit einer Ebene

$$E = \{y + \beta p + \gamma q \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

für $y, p, q \in \mathbb{R}^3$, p und q linear unabhängig, zu berechnen.

b) Welche Fälle können hierbei auftreten?

c) Berechnen Sie den Schnitt von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher Fall aus *b)* ist das?

Aufgabe 32: Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Skalarprodukte sind.

a) $j(x, y) := x_1 y_1 - x_2 y_2$

b) $k(x, y) := 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$

Aufgabe 33: Seien V und W $\mathbb{R}-$Vektorräume.
Das Kartesische Produkt $V \times W$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}.$$

Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit der Addition

$$(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v + \tilde{v}, w + \tilde{w})$$

und der Skalarmultiplikation

$$\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$$

ebenfalls ein $\mathbb{R}-$Vektorraum ist.