Vorbemerkung:
Dieses Übungsblatt ist als Probeklausur gedacht und geht nicht in die Wertung der vorgerechneten Übungsaufgaben ein. Es soll Ihnen einen Eindruck vermitteln, wie die anstehende Klausur beim jetzigen Stand der Vorlesung aussehen könnte.
Ausserdem soll es Ihnen die Gelegenheit geben, Ihren Wissensstand selbst zu überprüfen. Wir empfehlen daher sehr eindringlich die Aufgaben allleine zu bearbeiten, und dabei auch die benötigte Zeit zu kontrollieren bzw. zu protokollieren.
Die Probeklausur besteht aus 11 Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur ist eine Mindestpunktzahl von 50 Punkten erforderlich, die Noten werden auf Grundlage einer erreichbare Gesamtpunktzahl von 100 Punkten berechnet. (D. h. Sie können eine Aufgabe als Zusatzaufgabe betrachten.)
Für die Klausur stehen Ihnen drei Stunden Bearbeitungszeit zur Verfügung. Die Lösungen der Aufgaben dieses Übungsblattes werden in den jeweils ersten Übungsstunden nach den Weihnachtsferien besprochen.

Probeklausur:

Aufgabe 38: Welche der folgenden Funktionen lassen sich an der Stelle $x = 2$ stetig ergänzen, welcher Funktionswert ergibt sich:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x^3-4x}\ ,\ \text{b) } g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}\ ,\ \text{c) } h(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\ ?$$

Aufgabe 39: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad f(x) = x^2 \tan x = x^2 \frac{\sin x}{\cos x}\ , \\ &\text{b)} \quad g(x) = (e^x + e^{-x})^5\ , \\ &\text{c)} \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \ \text{ für } x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Aufgabe 40: a) Gegeben seien die folgenden drei Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Ebene E, welche durch diese drei Punkte geht, in Parameterform, d.h. in der Form
$$E = \{x + \lambda r + \mu q \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$
mit $x, r, q \in \mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes eine Darstellung der Ebene der Form $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d\}$.

Aufgabe 41: Weisen Sie nach, daß die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\ ,\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

Aufgabe 42: Berechnen Sie den Gradienten

$$\nabla f(u,v,w) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w),\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w),\ \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\right)$$

der Funktion

$$f(u,v,w) = \sqrt{(u-1)^2 + (v-3)^2 + (w-5)^2}\ .$$

Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen

$$\{(u,v,w) \mid f(u,v,w) = R\}\ ?$$

Aufgabe 43: Zeigen Sie, daß für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (\cosh x)' = \sinh x, \quad \text{b)} \quad (\sinh x)' = \cosh x, \\ \text{c)} & \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Tipp(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!

Aufgabe 44:

a) Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V und $\|\cdot\|_g$ die davon induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|x-y\|_g^2 = \|x\|_g^2 + \|y\|_g^2 - 2g(x,y).$$

b) Was bedeutet dies geometrisch, wenn man für $g(\cdot,\cdot)$ das euklidische Skalarprodukt wählt?
Tipp: Erinnern Sie sich an die geometrische Deutung des euklidischen Skalarproduktes.

Aufgabe 45:

a) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion f. Geben Sie das Newton-Verfahren an, mit dem man Nullstellen der Funktion f approximieren kann.

b) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, die dazu führen, dass die Bestimmung von Nullstellen über das Newton-Verfahren nicht funktioniert.

Aufgabe 46:

a) Geben Sie je ein Beispiel für einen eindimensionalen und einen zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Zeigen Sie, dass der Schnitt $U = U_1 \cap U_2$ zweier Untervektorräume U_1, U_2 eines Vektorraums V wieder ein Untervektorraum ist.

c) Beschreiben Sie, welche unterschiedlichen Fälle beim Schneiden eines eindimensionalen Untervektorraums des R^3 mit einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ auftreten können.

Aufgabe 47: Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Gegeben Sie gegebenfalls die dazugehörige Matrixdarstellung an:

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$,

b) $g(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}$,

c) $h(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$.

Aufgabe 48:

a) Bestimmen Sie das Bild von (x,y) unter Spiegelung an der y-Achse und unter Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden (d.h. an der Geraden $\{\alpha\binom{1}{1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$).

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der in a) beschriebenen Abbildungen.

c) Berechnen Sie das Produkt der Matrizen aus b). Welche Abbilung wird durch c) beschrieben (vergleichen Sie die Vorlesung).