Aufgabe 49: Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig?

Aufgabe 50:

a) Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix A so, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = Ax$$

als Kern die Ebene

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

hat.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

c) Kann man A so wählen, dass

$$\mathrm{Ker}(f) = H = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 1\}?$$

Aufgabe 51: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 48 \\ 85 \\ 125 \\ 166 \end{pmatrix}$$

mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Aufgabe 52: Seien h_1, h_2, h_3 die unbekannten Höhen dreier Messpunkte über Normalhöhennull.

a) Durch Messungen haben Sie bestimmt:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= 45\,m \\ h_2 - h_3 &= -33\,m \\ h_3 - h_1 &= -12\,m \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Sie nur anhand dieser drei Messungen die drei Höhen h_1, h_2, h_3 *nicht* berechnen können.

b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, die drei Messungen seien:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= d_{12} \\ h_2 - h_3 &= d_{23} \\ h_3 - h_1 &= d_{31} \end{aligned}$$

Welche Bedingung müssen d_{12}, d_{23}, d_{31} erfüllen, damit mindestens eine Lösung h_1, h_2, h_3 existiert, die alle drei Gleichungen erfüllt?

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/`