Aufgabe 49: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$\text{Zusatzaufgabe e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Begründen Sie:

a) Falls A rechte obere Dreiecksform hat und alle Diagonaleinträge nicht null sind, so ist $Ax = b$ stets eindeutig lösbar.

b) Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist stets ein affiner Unterraum oder die leere Menge. Wann ist der Lösungsraum linear (d.h. ein Untervektorraum)?

c) Falls $\det A = 42$, so hat $Ax = b$ genau eine Lösung.

d) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 51: Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

a) Wir betrachten die Zeilenumformung

"k-te Zeile mit α multiplizieren"

i) Wann ändert diese Umformung die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht?

ii) Was passiert mit $\det(A)$ unter dieser Umformung?

iii) Geben Sie die Matrix L an, mit der man diese Umformung durch die Matrixmultiplikation LA durchführen kann.

b) Nun betrachten wir die Zeilenumformung

"k-te Zeile $= \alpha$ mal k-te Zeile $+ \beta$ mal j-te Zeile"

mit $k \neq j$.

i) Wann ändert diese Umformung die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht?

ii) Was passiert mit $\det(A)$ unter dieser Umformung?

iii) Geben Sie die Matrix $\tilde{L}$ an, mit der man diese Umformung durch die Matrixmultiplikation $\tilde{L}A$ durchführen kann.

Tipp: Überlegen Sie, wie sich diese Zeilenumformung durch eine Umformung wie in Aufgabenteil a) und eine normale Zeilenumformung darstellen läßt.

c) Berechnen Sie die beiden folgenden Matrixprodukte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vartheta & \varphi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 52: Wir betrachten ein Parallelepiped $\mathbf{P}$, welches von den drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannt wird. Zusätzlich ist eine affine Abblidung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist $f(\mathbf{P})$ wieder ein Parallelepiped (Warum?).

a) Geben Sie die drei Vektoren an, die das Parallelepiped $f(\mathbf{P})$ aufspannen.

b) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Parallelepipeds $f(\mathbf{P})$ gilt

$$\operatorname{vol} f(\mathbf{P}) = |\det \mathbf{A}| \cdot |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = |\det \mathbf{A}| \cdot \operatorname{vol}(\mathbf{P}).$$

c) Berechnen Sie für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Volumen von $\mathbf{P}$ $\operatorname{vol}(\mathbf{P})$, sowie das Volumen von $f(\mathbf{P})$ $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$. Berechnen Sie $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$ einmal mit Hilfe der im vorigen Aufgabenteil angegeben Formel, als auch auf direktem Weg, indem sie zuerst $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ und $f(\mathbf{w})$ berechnen.

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws13/ingmath1/`