

**Aufgabe 53:** Gegeben sind die Funktionen

a)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b)  $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$

Zeichnen Sie die 1-Niveaulinie. Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen an den vier Stellen der Form  $(x_1, 0)$ ,  $(0, x_2)$  und an den vier Stellen der Form  $(x_1, x_1)$ ,  $(x_1, -x_1)$ . Skizzieren Sie jeweils die 8 Gradienten als Vektoren, die in den zugehörigen Punkten starten.

- Aufgabe 54:**
- a) Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  richtungsdifferenzierbar in allen Richtungen  $x_i, i = 1, \dots, n$  ist, dann ist  $f$  total differenzierbar.  
ja  nein
- b) Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar ist, dann ist  $f$  richtungsdifferenzierbar in allen Richtungen  $x_i, i = 1, \dots, n$ .  
ja  nein
- c) Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix  $A \in \mathbb{R}^{n,1}$  ein Spaltenvektor.  
ja  nein
- d) Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix  $A \in \mathbb{R}^{1,n}$  ein Zeilenvektor.  
ja  nein
- e) Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix  $A = 0$ .  
ja  nein
- f) Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar ist, dann enthält die Jacobimatrix die partiellen Ableitungen.  
ja  nein
- g) Wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar ist, dann steht in der Jacobimatrix an einer Stelle  $h$  und an allen anderen 0.  
ja  nein

**Aufgabe 55:** Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= \max(|x_1|, |x_2|) \\ &= \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2| + ||x_1| - |x_2||) \quad \text{und} \\ g(x_1, x_2) &:= |x_1| + |x_2|. \end{aligned}$$

a) Bestimmen und beschreiben Sie die Niveaumengen

$$\begin{aligned} N_r(f) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = r\} \quad \text{und} \\ N_r(g) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = r\}. \end{aligned}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze einiger Niveaumengen an.

b) Bestimmen und beschreiben Sie den Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$ . Skizzieren Sie die Graphen ebenfalls.

c) In welchen Punkten sind die Funktionen  $f, g$  differenzierbar bzw. in welchen Punkten sind sie nicht differenzierbar?

**Tipp:** Man kann dies anhand des jeweiligen Graphen erkennen!

**Aufgabe 56:** Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante der Abbildung  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

<http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws13/ingmath1/>