Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **12. August 2014**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte:

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \exp(1 + x_1 x_2)\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie den kritischen Punkt von f und geben Sie an, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. *(4 Punkte)*

d) Geben Sie die Taylorentwicklung 2. Ordnung (d.h. mit Restterm dritter Ordnung) von f um den Punkt $(0, 0)$ an. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 2: Betrachten Sie einen Zylinder mit Höhe $h > 0$ und Radius $r > 0$.

a) Geben Sie die Formel für das Volumen des Zylinders $V(h, r)$ an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Formel für die Oberfläche des Zylinders $A(h, r)$ an. (Die Oberfläche besteht aus Mantel, Boden und Deckel.) *(1 Punkt)*

c) Minimieren Sie die Oberfläche $A(h, r)$ unter der Nebenbedingung, dass das Volumen $V(h, r) = 1$ ist. *(8 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die (komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren von S. *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Diagonalisierung $S = UDU^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix und U eine invertierbare Matrix ist. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie $\exp(tS)$ für $t \in \mathbb{R}$. *(4 Punkte)*

Lösung:

a)

b)

c)

Aufgabe 4: a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung. *(7 Punkte)*

b) Geben Sie eine Definition an, wann eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal ist. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die bei der QR-Zerlegung in Teil a) auftretende Matrix Q bzw. $Q^{(1)}$ eine orthogonale Matrix im Sinne der Definition aus Teil b) ist. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

Aufgabe 5: Betrachten Sie den Rotationskörper, der durch die Rotation des Graphen der Funktion

$$r : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,, \qquad r(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\,,$$

um die x-Achse entsteht.

a) Geben Sie die Formel für die Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie für eine numerische Integrationsformel mit Knotenpunkten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ die Integrationsgewichte ω_i, $i = 0, 1, 2$. *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers näherungsweise, indem Sie das auftretende Integral mit der Formel aus (c) approximieren. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 6: Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung (Anfangswertproblem)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= t\,x(t)^2 \\ x(0) &= 2\,. \end{aligned}$$

a) Lösen Sie die Gleichung (mit Hilfe der Separation der Variablen). *(6 Punkte)*

b) Berechnen Sie mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren drei Schritte, d.h. x_1, x_2, x_3 zu dem Anfangswert $x_0 = x(0)$, zur Schrittweite $\tau = \frac{1}{4}$ zu diesem Anfangswertproblem. *(4 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

Aufgabe 7: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, d.h. $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Fourierkoeffizienten von f sind definiert als

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \ \text{ für } k \geq 0 \,,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \ \text{ für } k > 0 \,.$$

a) Falls f Lipschitz-stetig ist, wie sieht die Fourierentwicklung von f aus? *(2 Punkte)*

Betrachten Sie nun die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = x - \pi \,, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \,.$$

b) Zeichnen Sie den Graphen von f auf $[-2\pi, 4\pi]$. *(2 Punkte)*

c) Begründen Sie, dass für die Funktion f aus Aufgabenteil (b) gilt, dass $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$. *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie b_k (in Abhängigkeit von $k > 0$) für die Funktion f aus Aufgabenteil (b). *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 8: Betrachten Sie die Fläche

$$A := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\,,\; x_1 > 0 \right\}.$$

a) Zeichnen Sie die Fläche A. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von A. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt von A, wenn die Dichte $\rho \equiv 1$ konstant ist. *(5 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

Aufgabe 9: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und offen, $\partial\Omega$ durch eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert.

a) Geben Sie den Satz von Gauss an. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie an, wie man mit dem Satz von Gauss die Fläche von Ω durch ein Integral über die Kurve γ berechnet. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Fläche Ω, die durch die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{6}{5} + \cos t)\ \sin t \\ (\frac{6}{5} + \cos t)\ \cos t \end{pmatrix}$$

berandet ist. (Verwenden Sie die Methode aus Teil b) und das Integral aus Teil (d).)

(4 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass $\int_0^{2\pi} (\cos t)^2 \, \mathrm{d}t = \pi$ gilt. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 10: Der Torus (mit Radii $r > 0$ und $R > 0$) sei parametrisiert über das Parametergebiet $\Omega := [0, 2\pi]^2$ durch $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v,w) \in \mathbb{R}^{2,2}$. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Normale $N(v,w) \in \mathbb{R}^3$. *(1 Punkt)*

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0,1] \to \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

$$c : \xi \mapsto \left(\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\,\xi\right)$$

und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass $\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$ gilt. *(2 Punkte)*

e) Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass γ eine geodätische Kurve auf der Fläche $\mathcal{M} := x(\Omega)$ ist. *(2 Punkte)*

f) Zeigen Sie, dass γ eine geodätische Kurve auf der Fläche $\mathcal{M} := x(\Omega)$ ist. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

Bitte wenden!

d)

e)

f)