Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **12. August 2014**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte:

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \exp(1 + x_1 x_2)\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie den kritischen Punkt von f und geben Sie an, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. *(4 Punkte)*

d) Geben Sie die Taylorentwicklung 2. Ordnung (d.h. mit Restterm dritter Ordnung) von f um den Punkt $(0, 0)$ an. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \exp(1 + x_1 x_2) \\ x_1 \exp(1 + x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

b)

$$\operatorname{Hess} f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \exp(1 + x_1 x_2) & \exp(1 + x_1 x_2) + x_1 x_2 \exp(1 + x_1 x_2) \\ \exp(1 + x_1 x_2) + x_1 x_2 \exp(1 + x_1 x_2) & x_1^2 \exp(1 + x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

c) Notwendige Bedingung für einen kritischen Punkt $\bar{x}$ von f:

$$0 = \operatorname{grad} f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \exp(1+\bar{x}_1\bar{x}_2) \\ \bar{x}_1 \exp(1+\bar{x}_1\bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfe Definitheit von

$$\operatorname{Hess} f(\bar{x}) = \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e} \\ \mathrm{e} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von Hess $f(0,0)$ lösen die Gleichung

$$-\lambda^2 + e^2 = 0\,,$$

d.h. $\lambda_{1,2} = \pm e$, Hess $f(0,0)$ ist damit indifinit.
Die Funktion f hat in $\bar{x} = (0,0)$ also einen Sattelpunkt.

d) Taylorentwicklung 2. Ordnung um den Punkt $x = (0,0)$:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= f(x) + \operatorname{grad} f(x)\cdot\xi + \frac{1}{2}D^2 f(x)\xi\cdot\xi + O(\|\xi\|^3) \\ f(\xi) &= \mathrm{e} + 0 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e} \\ \mathrm{e} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3) \\ &= \mathrm{e} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}\xi_2 \\ \mathrm{e}\xi_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + O(\|\xi\|^3) \\ &= \mathrm{e} + \frac{2\mathrm{e}\xi_1\xi_2}{2} + O(\|\xi\|^3) = \mathrm{e} + \mathrm{e}\xi_1\xi_2 + O(\|\xi\|^3) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie einen Zylinder mit Höhe $h > 0$ und Radius $r > 0$.

a) Geben Sie die Formel für das Volumen des Zylinders $V(h, r)$ an.
(1 Punkt)

b) Geben Sie die Formel für die Oberfläche des Zylinders $A(h, r)$ an. (Die Oberfläche besteht aus Mantel, Boden und Deckel.)
(1 Punkt)

c) Minimieren Sie die Oberfläche $A(h, r)$ unter der Nebenbedingung, dass das Volumen $V(h, r) = 1$ ist. *(8 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Das Volumen $V(h, r)$ eines Zylinders abhängig vom Radius r und Höhe h ist

$$V(h, r) = \pi r^2 h$$

b) Die Oberfläche $A(h, r)$ eines Zylinders abhängig vom Radius r und Höhe h ist

$$A(h, r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

c) Die Lagrange Funtion ist gegeben durch

$$L(h, r, \lambda) = A(h, r) + \lambda\, G(h, r)$$

wobei $G(h, r) = V(h, r) - 1 = \pi r^2 h - 1$.

Die notwendigen Bedingungen lauten

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 = \partial_h L(h, r, \lambda) = \partial_h A(h, r) + \lambda \partial_h G(h, r) = 2\pi r + \lambda \pi r^2 \\ (2) & 0 = \partial_r L(h, r, \lambda) = \partial_r A(h, r) + \lambda \partial_r G(h, r) = 4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi r h \\ (3) & 0 = \partial_\lambda L(h, r, \lambda) = \partial_\lambda A(h, r) + \lambda \partial_\lambda G(h, r) = \pi r^2 h - 1 \end{array}$$

Aus (1) folgt $0 = 2 + \lambda r$, also $\lambda = -2/r$. Einsetzen in (2) ergibt

$$0 = 4\pi r + 2\pi h + (-2/r) 2\pi r h = 4\pi r + 2\pi h - 4\pi h\,,$$

also $h = 2r$. Dies eingesetzt in (3) ergibt dann $1 = 2\pi r^3$, also

$$r = (2\pi)^{-\frac{1}{3}} \quad \text{und somit} \quad h = 2\,(2\pi)^{-\frac{1}{3}}\,.$$

c) Alternativer Lösungsweg:

$$A(h,r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$V(h,r) = \pi r^2 h = 1$$

Löse $V(h,r) = 1$ nach h auf, d.h. $h = (\pi r^2)^{-1}$ und setze in $A(h,r)$ ein:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r(\pi r^2)^{-1} = 2\pi r^2 + 2r^{-1}$$

Die Ableitung von $A(r)$ ist gegeben durch

$$A'(r) = 4\pi r - 2r^{-2}\,.$$

Die notwendige Bedingung für minimale Oberfläche lautet $A'(r) = 0$.
Da $r > 0$ folgt daraus, dass $r = (2\pi)^{-\frac{1}{3}}$ und somit $h = 2^{\frac{2}{3}} 2\pi^{-\frac{1}{3}}$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die (komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren von S. *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Diagonalisierung $S = UDU^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix und U eine invertierbare Matrix ist. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie $\exp(tS)$ für $t \in \mathbb{R}$. *(4 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(S - \lambda \mathbb{1}).$$

Die Gleichung

$$0 = p(\lambda) = \det(S - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + 4.$$

hat die Lösungen $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$.

Der Eigenvektor $v = (v_1, v_2)$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 2i$ spannt den Kern von $S - \lambda_1 \mathbb{1}$ auf. Suche daher Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 0 - 2i & -2 \\ 2 & 0 - 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese sind gegeben durch Vielfaches von $v = (i, 1)^T$ bzw. $v = (1, -i)^T$.

Der Eigenvektor $w = (w_1, w_2)$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -2i$ spannt den Kern von $S - \lambda_2 \mathbb{1}$ auf. Suche daher Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 0 + 2i & -2 \\ 2 & 0 + 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese sind gegeben durch Vielfaches von $w = (1, i)^T$ bzw. $w = (i, -1)^T$.

b) Regel zum Invertieren von 2×2 - Matrizen:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Also

$$S = U\,D\,U^{-1}\,, \quad U = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\,, \quad U^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\,, \quad D = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Je nach Wahl der Eigenvektoren und Sortierung der Eigenwerte sieht U und somit U^{-1} anders aus.

c) Mit Aufgabenteil b) folgt :

$$\begin{aligned}
\exp(tS) &= \exp(\,t\,U\,D\,U^{-1}\,) = U\,\exp(\,tD\,)\,U^{-1} \\
&= U \begin{pmatrix} \exp(2it) & 0 \\ 0 & \exp(-2it) \end{pmatrix} U^{-1} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(2it) & 0 \\ 0 & \exp(-2it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\exp(2it) - \exp(-2it) & -i\exp(2it) + i\exp(-2it) \\ i\exp(2it) - i\exp(-2it) & -\exp(2it) - \exp(-2it) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\exp(2it) + \exp(-2it)) & -\frac{1}{2i}(\exp(2it) - \exp(-2it)) \\ \frac{1}{2i}(\exp(2it) - \exp(-2it)) & \frac{1}{2}(\exp(2it) + \exp(-2it)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Je nach Wahl der Eigenvektoren und Sortierung der Eigenwerte sieht U und somit U^{-1} anders aus.

Aufgabe 4: a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung. *(7 Punkte)*

b) Geben Sie eine Definition an, wann eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal ist. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die bei der QR-Zerlegung in Teil a) auftretende Matrix Q bzw. $Q^{(1)}$ eine orthogonale Matrix im Sinne der Definition aus Teil b) ist. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Sei $A = (a_1 \,|\, a_2)$. Gesucht ist eine Matrix $Q^{(1)}$ mit

$$Q^{(1)} a_1 = \alpha_1 \, e_1 \,,$$

wobei $Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}$ eine Spiegelung an der Ebene $\{x \cdot v_1 = 0\}$ darstellt. Dazu muss v_1 im Span von $a_1 - \alpha_1 e_1$ liegen, o.B.d.A. $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1$.

Da $Q^{(1)}$ orthogonal, gilt $|\alpha_1| = \|\alpha_1 e_1\| = \|Q a_1\| = \|a_1\| = 5$, laut Skript ist $\alpha_1 = -\mathrm{sgn}(A_{11})|\alpha_1| = 5$ eine stabile Wahl.

Es folgt also $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1 = (-8, 4)^T$ und somit

$$Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung auf das LGS $Ax = b$:

$$Q^{(1)} a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} a_2 = a_2 - \frac{2(a_2 \cdot v_1)}{80} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot (-20)}{80}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(es gilt } Q^{(1)} b = b\text{, da } b \perp v_1\text{)}$$

Dann folgt

$$R = QA = Q^{(1)} A = \left(Q^{(1)} a_1 \,\middle|\, Q^{(1)} a_2 \right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = Qb = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also $x_2 = 2$ und $5x_1 - 4 = 1$, d.h. $x = (1, 2)^T$.

b) Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist orthogonal, falls $Q^T Q = \mathbb{1}$ gilt.

Alternativ kann man begründen, dass $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal ist, falls Q darstellende Matrix einer längenerhaltenden Abbildung ist, bzw. wenn Q als Matrix längenerhaltend ist.

c) Zeige für $Q = Q^{(1)}$, dass $Q^T Q = \mathbb{1}$ gilt.

$$
\begin{aligned}
Q^T Q &= \left[\mathbb{1} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T \cdot \left[\mathbb{1} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \mathbb{1} - 2 \cdot \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{25}\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}
$$

Alternativ: Rechne mit der Darstellung $Q = Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}$:

$$
\begin{aligned}
Q^T Q &= (\mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2})^T (\mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}) \\
&= \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} + 4\frac{v_1 v_1^T \cdot v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_1\|^2} \\
&= \mathbb{1} - 4\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} + 4\frac{\|v_1\|^2 \cdot v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_1\|^2} \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}
$$

Falls man in Teil b) alternativ begründet hat, dass orthogonale Matrizen längenerhaltend sind, muss man angeben, dass $Q = Q^{(1)}$ eine Spiegelung und somit längenerhaltend ist.

Aufgabe 5: Betrachten Sie den Rotationskörper, der durch die Rotation des Graphen der Funktion

$$r : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,, \qquad r(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\,,$$

um die x-Achse entsteht.

a) Geben Sie die Formel für die Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie für eine numerische Integrationsformel mit Knotenpunkten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ die Integrationsgewichte ω_i, $i = 0, 1, 2$. *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers näherungsweise, indem Sie das auftretende Integral mit der Formel aus (c) approximieren. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Das Volumen V eines Rotationskörpers mit Radius $r(x)$ ist gegeben durch

$$V = \int_{-1}^{1} \pi r(x)^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

b) Für $r(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ gilt also:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi r(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} (1 - \frac{1}{2}x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} 1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4 \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \Big[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{20}x^5\Big]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{60}(60 - 20 + 3) = \pi\,\frac{43}{30} \end{aligned}$$

Seite 10

c) Die Formel für die Integrationsgewichte ist gegeben durch

$$\omega_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei

$$L_i(x) = \Pi_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

die Lagrange Basisfunktionen darstellen.

Für $L_0(x)$ mit $x_0 = -1$ gilt also:

$$L_0(x) = \Pi_{j \neq 0} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} = \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

und für $a = -1$ und $b = 1$ folgt somit

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\,.$$

Analog für $L_1(x)$ mit $x_1 = 0$:

$$L_1(x) = \Pi_{j \neq 1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} \cdot \frac{x-1}{0-1} = -(x+1)\cdot(x-1) = 1 - x^2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} - \big(-1 + \frac{1}{3}\big)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{6}$$

Analog für $L_2(x)$ mit $x_2 = 0$:

$$L_2(x) = \Pi_{j \neq 2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{x-0}{1-0} = \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Alternativ: Es gilt $w_2 = w_0 = \frac{1}{6}$ wegen Symmetrie der Knotenpunkte und $w_1 = 1 - w_0 - w_2 = \frac{4}{6}$.

d) Numerische Quadraturformel für $f(x) = r(x)^2$:

$$\sum_i (b-a)\omega_i f(x_i) = \frac{2}{6}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big) = \frac{2}{6}\Big((\tfrac{1}{2})^2 + 4\cdot 1^2 + (\tfrac{1}{2})^2\Big) = \frac{2}{6}\frac{18}{4} = \frac{3}{2} = \frac{45}{30}$$

Aufgabe 6: Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung (Anfangswertproblem)

$$\dot{x}(t) = t\,x(t)^2$$
$$x(0) = 2\,.$$

a) Lösen Sie die Gleichung (mit Hilfe der Separation der Variablen). *(6 Punkte)*

b) Berechnen Sie mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren drei Schritte, d.h. x_1, x_2, x_3 zu dem Anfangswert $x_0 = x(0)$, zur Schrittweite $\tau = \frac{1}{4}$ zu diesem Anfangswertproblem. *(4 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Separation der Variablen, formaler Ansatz:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = tx^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2}dx = tdt \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x^2}dx = \int_0^t sds = \frac{1}{2}t^2$$

Da

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x^2}dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{x(0)}^{x(t)} = -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(0)} = -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{2}$$

folgt

$$x(t) = -\Big(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\Big)^{-1} = \frac{2}{1-t^2}\,.$$

b) Das Eulersche Polygonzugverfahren lautet für $t_k = k\tau$ und $k \geq 0$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \tau\dot{x}(t_k) \quad \text{bzw.} \quad x_{k+1} = x_k + \tau\dot{x}_k$$

für $x_k := x(t_k)$ und $\dot{x}_k := \dot{x}(t_k)$.

Durch Einsetzen der DGL $\dot{x}(t_k) = t_k x_k^2$ erhält man nun:

$$x_{k+1} = x_k + \tau\dot{x}_k = x_k + \tau(t_k x_k^2) = x_k + \tau(k\tau)x_k^2 = x_k + k\tau^2 x_k^2$$

Berechne nun drei Schritte mit $\tau = \frac{1}{4}$ und $x_0 = x(0) = 2$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 2 + 0\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 2^2 = 2 \\
x_2 &= 2 + 1\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 2^2 = 2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4} \\
x_3 &= \tfrac{9}{4} + 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \left(\tfrac{9}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{4} + \tfrac{81}{2\cdot 4^3} = \tfrac{288+81}{128} = \tfrac{369}{128}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Bruch im letzten Schritt muss nicht ganz aufgelöst werden.

Aufgabe 7: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, d.h. $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Fourierkoeffizienten von f sind definiert als

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \quad \text{für } k \geq 0 \,,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \quad \text{für } k > 0 \,.$$

a) Falls f Lipschitz-stetig ist, wie sieht die Fourierentwicklung von f aus? *(2 Punkte)*

Betrachten Sie nun die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = x - \pi \,, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \,.$$

b) Zeichnen Sie den Graphen von f auf $[-2\pi, 4\pi]$. *(2 Punkte)*

c) Begründen Sie, dass für die Funktion f aus Aufgabenteil (b) gilt, dass $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$. *(3 Punkte)*

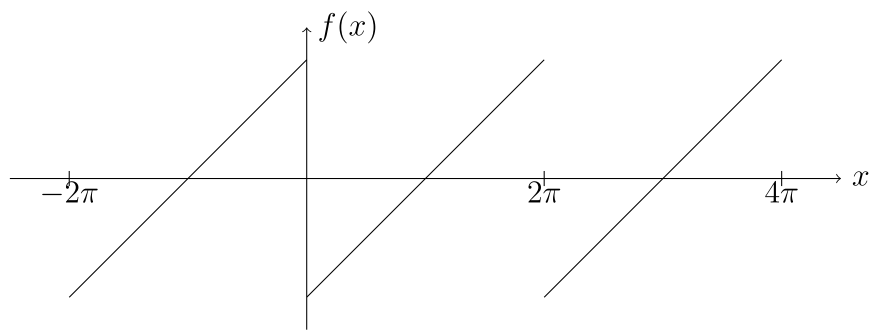
d) Berechnen Sie b_k (in Abhängigkeit von $k > 0$) für die Funktion f aus Aufgabenteil (b). *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Falls f Lipschitz-stetig ist, ist die Fourierentwicklung von f gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \,.$$

b) Funktionsgraph:



Seite 14

c) Da $\cos(kx)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine gerade, 2π - periodische Funktion und $f(x) = x - \pi\,,\ 0 \le x \le 2\pi$ (periodisch fortgesetzt) eine ungerade, 2π - periodische Funktion ist, ist das Produkt $\cos(kx)f(x)$ ungerade und 2π - periodisch.

Da $\cos(kx)f(x)$ 2π - periodisch ist, gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Da $\cos(kx)f(x)$ ungerade ist, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

d)

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x}_{=0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{k}\cos(kx)x\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{k\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=0} = -\frac{1}{k\pi}\underbrace{\cos(k\cdot 2\pi)}_{=1}\,2\pi = -\frac{2}{k}$$

Aufgabe 8: Betrachten Sie die Fläche

$$A := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\,,\ x_1 > 0 \right\}.$$

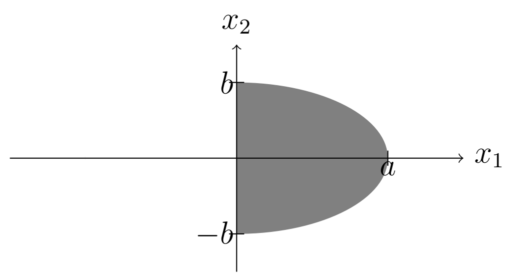
a) Zeichnen Sie die Fläche A. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von A. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt von A, wenn die Dichte $\rho \equiv 1$ konstant ist. *(5 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Die Fläche A stellt eine halbe Ellipse dar:



b) Alternative (i): Benutze die Formel für den Flächeninhalt einer Ellipse E mit Halbachsen $a, b > 0$, d.h. $\mathrm{vol}_2(E) = ab\pi$ und leite $\mathrm{vol}_2(A) = \frac{1}{2}ab\pi$ ab.

Alternative (ii): Benutze die Transformationssatz mit der Substitution

$$x = (x_1, x_2) = g(r, \varphi) = (ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,.$$

Dann folgt

$$|\det Dg| = |\det \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}| = |abr\,\cos^2\varphi + abr\,\sin^2\varphi| = abr\,.$$

Es gilt $A = g(B)$ mit

$$B = \{(r, \varphi) \,|\, 0 < r \leq 1\,,\ -\tfrac{\pi}{2} < \varphi < \tfrac{\pi}{2}\}\,.$$

Der Transformationssatz liefert nun

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(A) &= \int_A \mathrm{d}x = \int_{g(B)} \mathrm{d}x = \int_B |\det Dg| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} abr \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= ab \cdot \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = ab \cdot \Big[\tfrac{1}{2}r^2\Big]_0^1 \cdot \Big[\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi\,. \end{aligned}$$

b) Alternative (iii): Schreibe A um als

$$A := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x_1 < a\sqrt{1 - \frac{x_2^2}{b^2}}, \quad -b \leq x_2 \leq b \right\}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(A) &= \int_{-b}^{b} \int_0^{a\sqrt{1-\frac{x_2^2}{b^2}}} \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = a \int_{-b}^{b} \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{b^2}} \, \mathrm{d}x_2 \\
&= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{(b\sin(z))^2}{b^2}} b\cos(z) \, \mathrm{d}z = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z) \, \mathrm{d}z \\
&= ab \cdot \frac{1}{2} \Big[z + \sin z \, \cos z \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{2}
\end{aligned}$$

wobei die Substitution $x_2 = b\sin(z)$ mit $\frac{dx_2}{dz} = b\cos(z)$ benutzt wurde.

c) Der Schwerpunkt $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ von A ist definiert als

$$s = \frac{1}{\mathrm{vol}_2(A)} \int_A x \, \mathrm{d}x \, .$$

Wir wissen aus Aufgabenteil (b), dass $\mathrm{vol}_2(A) = \frac{ab\pi}{2}$. Benutze den Transformationssatz mit der Substitution

$$x = (x_1, x_2) = g(r, \alpha) = (ar\cos\varphi, br\sin\varphi) \, .$$

und $|\det Dg| = abr$ - siehe Alternative (ii) in Teil b).

Dann ist $A = g(B)$ mit $B = \{(r, \varphi) \,|\, 0 < r \leq 1 \, , \; -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$.

$$\begin{aligned}
s_1 &= \mathrm{vol}_2(A)^{-1} \int_A x_1 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_{g(B)} x_1 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_B ar\cos\varphi |\det Dg| \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{ab\pi} \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ar\cos\varphi \cdot abr \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{2a}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r = \frac{2a}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2 &= \mathrm{vol}_2(A)^{-1} \int_A x_2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_{g(B)} x_2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{ab\pi} \int_B br\sin\varphi |\det Dg| \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{ab\pi} \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} br\sin\varphi \cdot abr \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{2b}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r = \frac{2a}{\pi} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 9: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und offen, $\partial\Omega$ durch eine glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert.

a) Geben Sie den Satz von Gauss an. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie an, wie man mit dem Satz von Gauss die Fläche von Ω durch ein Integral über die Kurve γ berechnet. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Fläche Ω, die durch die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{6}{5} + \cos t)\,\sin t \\ (\frac{6}{5} + \cos t)\,\cos t \end{pmatrix}$$

berandet ist. (Verwenden Sie die Methode aus Teil b) und das Integral aus Teil (d).)

(4 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass $\int_0^{2\pi} (\cos t)^2 \,\mathrm{d}t = \pi$ gilt. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Satz von Gauss: Sei $F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $N : \partial\Omega \to S^2$ das äußere Normalenfeld. Dann gilt:

$$\int_\Omega \mathrm{div} F \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F \cdot N \,\mathrm{d}a\,.$$

b) Zur Berechnung des Flächeninhalts $\mathrm{vol}_2(\Omega) = \int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x$ suche ein Vektorfeld F mit $\mathrm{div}F \equiv 1$, z.B. $F = F_i$ mit

$$F_1(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_3(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

und berechne

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot N \,\mathrm{d}a = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot N(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t$$

wobei das äußere Normalenfeld entlang der Kurve gegeben ist durch

$$N(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix}.$$

c) Für oben angegebenes γ gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \, \sin t + (\frac{6}{5} + \cos t) \, \cos t \\ -\sin t \, \cos t - (\frac{6}{5} + \cos t) \, \sin t \end{pmatrix}$$

Für $F = F_1$ mit $\mathrm{div} F = 1$ gilt mit $\beta(t) := \frac{6}{5} + \cos t$

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(\Omega) &= \int_\Omega \mathrm{div} F \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot N(x) \, \mathrm{d}a = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot N(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \beta(t) \, \sin t \cdot [\sin t \, \cos t + \beta(t) \, \sin t] + \beta(t) \, \cos t \cdot [\beta(t) \, \cos t - \sin t \, \sin t] \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \beta(t) \sin^2 t \, \cos t + \beta^2(t) \sin^2 t + \beta^2(t) \, \cos^2 t - \beta(t) \, \cos t \sin^2 t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\tfrac{6}{5} + \cos t)^2 \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\tfrac{6}{5})^2 + \tfrac{12}{5} \cos t + \cos^2 t \, \mathrm{d}t \\
&= \pi \frac{6^2}{5^2} - \frac{6}{5} \Big[\sin t \Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \Big[t + \sin t \cos t \Big]_0^{2\pi} = \pi \frac{6^2}{5^2} - \frac{1}{4}(2\pi - 0) = \pi \, \frac{97}{50}
\end{aligned}$$

d) Mit partieller Integration gilt:

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^2 \, \mathrm{d}t = \underbrace{\Big[\cos t \cdot \sin t \Big]_0^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t)^2}_{=1-\cos^2 t} \, \mathrm{d}t = 0 + 2\pi - \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 \, \mathrm{d}t$$

also

$$2 \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 \, \mathrm{d}t = 2\pi \, .$$

Aufgabe 10: Der Torus (mit Radii $r > 0$ und $R > 0$) sei parametrisiert über das Parametergebiet $\Omega := [0, 2\pi]^2$ durch $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v, w) \in \mathbb{R}^{2,2}$. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Normale $N(v, w) \in \mathbb{R}^3$. *(1 Punkt)*

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0, 1] \to \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

$$c : \xi \mapsto \left(\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\,\xi\right)$$

und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass $\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$ gilt. *(2 Punkte)*

e) Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass γ eine geodätische Kurve auf der Fläche $\mathcal{M} := x(\Omega)$ ist. *(2 Punkte)*

f) Zeigen Sie, dass γ eine geodätische Kurve auf der Fläche $\mathcal{M} := x(\Omega)$ ist. *(2 Punkte)*

Lösung:

a) Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v, w) = \left(\partial_v x \;\middle|\; \partial_w x\right) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\,\sin v & -r\cos v\,\sin w \\ (R + r\cos w)\,\cos v & -r\sin v\,\sin w \\ 0 & r\,\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v, w)^T Dx(v, w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Normale ist gegeben durch

$$N(v, w) = \frac{\partial_v x \times \partial_w x}{\|\partial_v x \times \partial_w x\|}, \quad \partial_v x \times \partial_w x = \begin{pmatrix} r(R + r\cos w)\cos v\,\cos w \\ r(R + r\cos w)\sin v\,\cos w \\ r(R + r\cos w)\sin w \end{pmatrix}$$

und $\|\partial_v x \times \partial_w x\| = r(R + r\cos w)$, daher

$$N(v, w) = \begin{pmatrix} \cos v\,\cos w \\ \sin v\,\cos w \\ \sin w \end{pmatrix}.$$

c) Die Länge einer Kurve γ ist definiert als $L[\gamma] = \int_0^1 \|\dot\gamma(\xi)\| \,\mathrm{d}\xi$. Es gilt

$$\gamma = x \circ c : \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ R + r\cos(2\pi\,\xi) \\ r\,\sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\, r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\, r\,\cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix},$$

oder alternativ mit Kettenregel

$$\frac{d}{d\xi}\Big(x \circ c\Big)(\xi) = Dx(c(\xi)) \cdot \dot c(\xi) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos(2\pi\xi))\,\sin\frac{\pi}{2} & -r\cos\frac{\pi}{2}\,\sin(2\pi\xi) \\ (R + r\cos(2\pi\xi))\,\cos\frac{\pi}{2} & -r\sin\frac{\pi}{2}\,\sin(2\pi\xi) \\ 0 & r\,\cos(2\pi\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\, r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\, r\,\cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\|\dot\gamma(\xi)\|^2 = (2\pi r)^2\,(\sin^2(2\pi\,\xi) + \cos^2(2\pi\,\xi)) = (2\pi r)^2\,.$$

Es folgt $L[\gamma] = 2\pi r$.

d) Für die zweite Ableitung gilt

$$\ddot\gamma(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi^2\, r\cos(2\pi\,\xi) \\ -4\pi^2\, r\,\sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix},$$

also folgt

$$\ddot\gamma(\xi) \cdot \dot\gamma(\xi) = 0 + (-4\pi^2)\, r\cos(2\pi\,\xi) \cdot (-2\pi)\, r\sin(2\pi\,\xi) + (-4\pi^2)\, r\,\sin(2\pi\,\xi) \cdot 2\pi\, r\,\cos(2\pi\,\xi) = 0$$

e) Bedingung (i): Laut Definition in der Vorlesung ist eine glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}$ eine Geodätische, falls

$$\dot\gamma(\xi) \neq 0 \quad \text{und} \quad \ddot\gamma(\xi) - [\ddot\gamma(\xi) \cdot N(\gamma(\xi))]\, N(\gamma(\xi)) - \left[\ddot\gamma(\xi) \cdot \frac{\dot\gamma(\xi)}{\|\dot\gamma(\xi)\|}\right] \frac{\dot\gamma(\xi)}{\|\dot\gamma(\xi)\|} = 0$$

gilt, wobei $N : \mathcal{M} \to S^2$ die Normale an $\mathcal{M}$ ist.

Alternative Bedingung (ii): Es muss gelten

$$\ddot\gamma(\xi) \cdot \Big(\dot\gamma(\xi) \times N(\xi)\Big) = 0\,.$$

f) Überprüfe Bedingung (i) aus Teil (e):
Da $r, R > 0$ ist $\dot{\gamma}(\xi) \neq 0$. Nach Aufgabenteil (d) verschwindet zudem der letzte Term der rechten Gleichung. Somit gilt hier:

$$\gamma \text{ ist geodätische Kurve} \iff \quad \ddot{\gamma}(\xi) = [\ddot{\gamma}(\xi) \cdot N(\gamma(\xi))]\, N(\gamma(\xi)) \qquad (1)$$

Mit Aufgabenteil (b) wissen wir, dass für $N(\xi) := N(\gamma(\xi))$ gilt

$$N(\xi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2}\, \cos(2\pi\xi) \\ \sin\frac{\pi}{2}\, \cos(2\pi\xi) \\ \sin(2\pi\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi\xi) \\ \sin(2\pi\xi) \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\ddot{\gamma}(\xi) \cdot N(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi^2\, r\cos(2\pi\,\xi) \\ -4\pi^2\, r\, \sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi\xi) \\ \sin(2\pi\xi) \end{pmatrix} = -4\pi^2\, r$$

und somit

$$[\ddot{\gamma}(\xi) \cdot N(\xi)]\, N(\xi) = -4\pi^2\, r \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi\xi) \\ \sin(2\pi\xi) \end{pmatrix} = \ddot{\gamma}(\xi)\,.$$

Also ist Gleichung (1) für γ erfüllt, γ ist eine geodätische Kurve.

Alternativ: Überprüfe Bedingung (ii) aus Teil (e):

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma}(\xi)\cdot\Big(\dot{\gamma}(\xi) \times N(\xi)\Big) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi^2\, r\cos(2\pi\,\xi) \\ -4\pi^2\, r\, \sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\, r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\, r\, \cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\pi\xi) \\ \sin(2\pi\xi) \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -4\pi^2\, r\cos(2\pi\,\xi) \\ -4\pi^2\, r\, \sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\pi\, r\sin(2\pi\,\xi)\cdot\sin(2\pi\xi) - 2\pi\, r\, \cos(2\pi\,\xi)\cdot\cos(2\pi\xi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

wobei $\ddot{\gamma}(\xi)$, $\dot{\gamma}(\xi)$ und $N(\xi)$ in vorherigen Aufgabenteilen berechnet wurden.