**Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22)** **20. März 2014**
**für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation**

---

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

---

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ..................................................................

Vorname: ..............................................................

Matrikel-Nr.: ..........................................................

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ........................................................

| Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte: | | | | | | |
| Aufgabe: | 7 | 8 | 9 | 10 | | $\sum$ |
| Punkte: | | | | | | |

Gesamtzahl der Punkte:

Note: Viel Erfolg!

**Aufgabe 1:** Betrachten Sie die nicht symmetrische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $M$ und lesen Sie (ohne Ausmultiplizieren!) die Eigenwerte von $M$ direkt ab. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren von $M$. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie zur Diagonalisierung von $M$ die Transformationsmatrix und die inverse Transformationsmatrix. *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie $\exp(M)$. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

d)

**Aufgabe 2:**

a) Zeigen Sie, dass $S = \mathbb{1} - \frac{2vv^T}{\|v\|^2}$ für $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ orthogonal ist. Geben Sie $S^{-1}$ an! *(3 Punkte)*

b) Finden Sie die Parameter $(b, m)$ der affinen Funktion

$$y(x) = b + mx,$$

die die unten stehenden Punkte im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut approximiert.
Lösen Sie dieses Regressionsproblem mittels des QR-Verfahrens **ohne** Zuhilfenahme der Normalengleichung ($Q$ muss nicht angegeben werden).
**Hinweis:** Der gesuchte Vektor sollte die Unbekannten in der Reihenfolge $(b, m)$ enthalten, andernfalls würde die Rechnung deutlich schwieriger. *(7 Punkte)*

| $x_i$ | $-10$ | $-3$ | $6$ | $9$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $-5$ | $-1$ | $2$ | $8$ |

LÖSUNG:

a)

b)

**Aufgabe 3:** Sei für $n \geq 0$

$$\mathcal{A}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx.$$

a) Geben Sie die Formeln für partielle Integration und Substitution im eindimensionalen Fall an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_1$. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie mittels partieller Integration

$$\mathcal{A}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \mathcal{A}_{n-1}$$

für $n \geq 1$. **Hinweis:** $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ *(4 Punkte)*

d) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: *(2 Punkte)*

$$\mathcal{A}_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{A}_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

Lösung:

a)

b)

c)

d)

**Aufgabe 4:** Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

mit $a, b, c > 0$.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung zu einem System von 2 Differentialgleichungen erster Ordnung um. *(3 Punkte)*

b) Begründen Sie, warum diese Differentialgleichung mit den Anfangswerten

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

mit $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung besitzt. *(2 Punkte)*

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem *(5 Punkte)*

$$\dot{x}(t) = (t+1)\,x(t) + \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right), \qquad x(0) = 2\,.$$

LÖSUNG:

a)

b)

c)

$$\dot{x}(t) = (t+1)x(t) + \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right), \qquad x(0) = 2\,.$$

**Aufgabe 5:** Betrachten Sie folgende Mengen:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + z^2 = y^2\},$$
$$B_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + (y - \alpha)^2 + z^2 = 25\}.$$

a) Um welche geometrischen Objekte handelt es sich bei $A$ und $B_\alpha$? *(2 Punkte)*

b) Sind (für $\alpha = 1$) $A \cap B_1$ bzw. (für $\alpha = 5$) $A \cap B_5$ differenzierbare Kurven (im Sinne der Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen)?
Begründen Sie Ihre Antwort! *(2 Punkte)*

c) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve(n) $A \cap B_1$ an! *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie den Tangentialraum für die Kurve(n) $A \cap B_1$. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

d)

**Aufgabe 6:** Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 = 25\} \qquad \text{und der Punkt } p = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

gesucht ist der Punkt $(x, y, z) \in M$, dessen Abstand von $p$ minimal ist.

a) Begründen Sie, warum man anstelle des Abstandes den quadrierten Abstand betrachten kann. *(2 Punkte)*

b) Finden Sie alle kritischen Punkte des quadrierten Abstands $||(x, y, z) - p||^2$ unter der Nebenbedingung $(x, y, z) \in M$. *(6 Punkte)*

c) Bei welchem Punkt handelt es sich um die globale Minimalstelle? Was ist der minimale Abstand? *(1+1 Punkte)*

Lösung:

a)

b)

c)

**Aufgabe 7:** a) Geben Sie den Transformationssatz im $\mathbb{R}^n$ an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie das Volumen der Menge $(a, b, c > 0)$ *(4 Punkte)*

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \leq 1\}.$$

Verwenden Sie dabei den Transformationssatz. Das Volumen einer Kugel mit Radius $r$ dürfen Sie als bekannt voraussetzen: $\frac{4}{3}\pi r^3$

c) Der Mittelstreifen einer Straße mit konstanter Breite $2a$ sei gegeben durch die Kurve

$$\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}.$$

$\gamma$ ist hierbei bogenlängenparametrisiert. Die Parametrisierung der gesamten Straße ist folglich

$$\tilde{\gamma} : [0, T] \times [-a, a] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t, r) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) - r\dot{\gamma}_2(t) \\ \gamma_2(t) + r\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen weiterhin an, dass $\gamma$ und $\tilde{\gamma}$ beliebig oft stetig differenzierbar und invertierbar sind und keine Selbstüberschneidungen der Straße auftreten. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Straße. *(4 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

**Seite 15**

c)

$$\tilde{\gamma}(t, r) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) - r\dot{\gamma}_2(t) \\ \gamma_2(t) + r\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 8:** a) Geben Sie den Satz von Gauß im $\mathbb{R}^n$ an. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von $\partial K$ als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über $K$ umschreiben. Dabei bezeichnet $\nu$ die äußere Normale.

**Hinweis:**

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{4}$$

*(3+4 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

**Aufgabe 9:** (i) Gegeben sei $z \in \mathbb{C}$ in der Darstellung

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}.$$

a) Berechnen Sie in dieser Darstellung $z^8$, d.h. geben Sie $s$, $\theta$ in Abhängigkeit von $r$ und $\varphi$ an, so dass $z^8 = s \cdot e^{i \cdot \theta}$. *(2 Punkte)*

b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $z^8 = 1$? Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ an. *(2 Punkte)*

(ii) Betrachten Sie die Funktion $f$, die auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 2 - \frac{2}{\pi}x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \\ -4 + \frac{2}{\pi}x, & x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \end{cases}$$

definiert ist und anschließend $2\pi$-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 4\pi)$. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Koeffizienten zu einer Approximation dieser Funktion mittels Schneller Fouriertransformation (FFT) für 4 Punkte auf dem Intervall $[0, 2\pi)$. *(4 Punkte)*

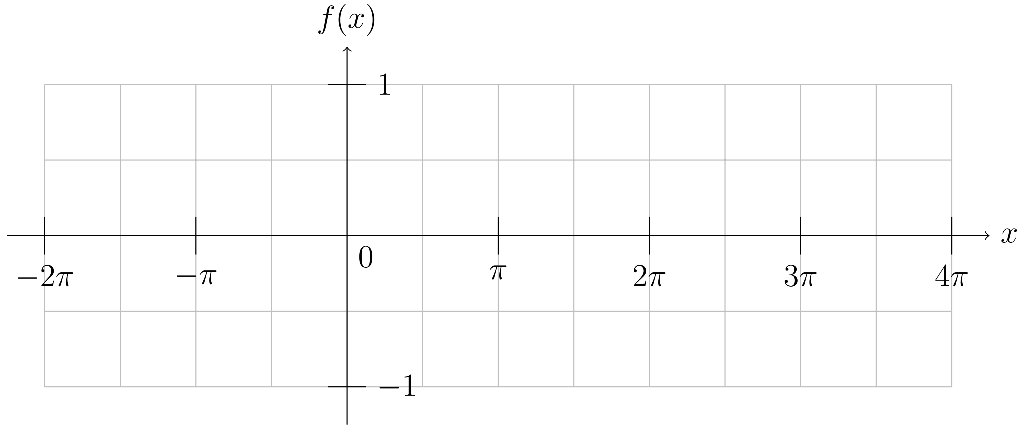
Lösung:

(i) a)

b)

**Seite 19**

(ii) a)




b)

**Aufgabe 10:** a) Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Kurve $\gamma$ für $t \in [-\pi, \pi]$. *(3 Punkte)*
**Hinweis:** Berechnen Sie zunächst $\gamma(t)$ für $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$ und nutzen Sie danach die Achsensymmetrie bzgl. der $x$-Achse aus.

b) Berechnen Sie $\dot{\gamma}$ für die Kurve $\gamma$ aus Teil a). *(1 Punkt)*

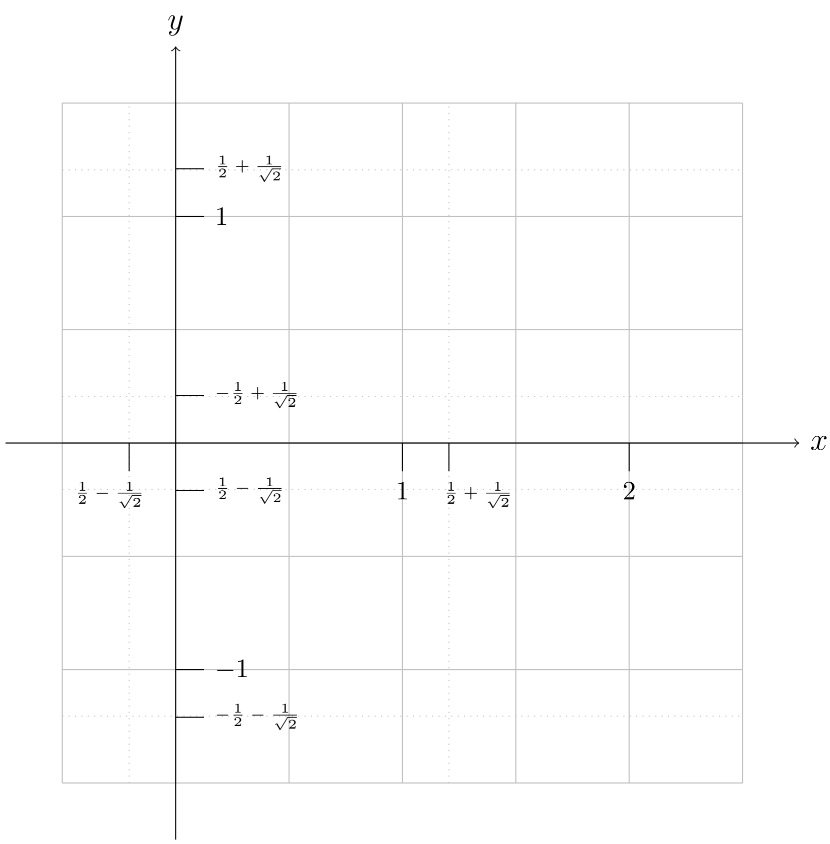
c) Wie ist die Länge einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ definiert?
Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma$ aus Teil a). *(3 Punkte)*
**Hinweis:** Es gilt $|\cos(\frac{1}{2}x)| = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(x))}$.

d) Betrachten Sie einen Kreis mit Radius $r$ um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$.
Geben Sie eine Bogenlängenparametrisierung dieses Kreises an.
*(1 Punkt)*

e) Wie ist die Krümmung (mit Vorzeichen!) einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ definiert?
Berechnen Sie die Krümmung des Kreises mit Radius $r$ aus d).
*(1+1 Punkte)*

Lösung:

a)



b)

c)

d)

e)