Aufgabe 1

a)

$$\det(M - \lambda \mathbb{1})$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda)\,(2-\lambda)$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = 2.$$

b)

Zu berechnen ist der Kern von $M - \lambda_i \mathbb{1}$ für $i \in \{1,2,3\}$.

λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cancel{3}2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad b = 0\,, \quad c = -2a$

Wir wählen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

λ_2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad a = b$ und $c = -2a$

Wir wählen $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

λ_3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad b = 0\,, \quad a = 0\,, \quad c \in \mathbb{R}$

Wir wählen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c)

Eintragen EV in die Spalten einer Matrix liefert die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun S^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\exp(M) = S \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & & \\ & e^3 & \\ & & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & -e^1 & 0 \\ 0 & -e^3 & 0 \\ 2e^2 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^1 & e^3-e^1 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 2e^2-2e^1 & 2e^1-2e^3 & e^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) OE gilt $\|v\| = 1$ (sonst schreibe $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$).

Dann gilt:

$$(\mathbb{1} - 2vv^T)(\mathbb{1} - 2vv^T)^T$$

$$= (\mathbb{1} - 2vv^T)(\mathbb{1} - 2vv^T)$$

$$= (\mathbb{1} - 2vv^T) - 2vv^T + 4v\underbrace{v^Tv}_{=\|v\|^2 = 1}v^T$$

$$= \mathbb{1} - 4vv^T + 4vv^T$$

$$= \mathbb{1}$$

b) Es ergibt sich das Minimierungsproblem

$$\|Ax - \tilde{b}\|^2 \longrightarrow \min.$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$

Dann rechne man:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad \alpha_1 = -\operatorname{sign}(1) \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = -2$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha_1 e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{(1)} = \mathbb{1} - \frac{1}{6} v_1 v_1^T$$

$$\Rightarrow Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q^{(1)} \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad Q^{(1)} \tilde{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad \hat{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = -15 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Q^{(2)} = \mathbb{1} - \frac{1}{225} v_2 v_2^T$$

$$\Rightarrow \quad Q^{(2)} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q^{(2)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q^{(2)} \tilde{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2,4 \\ -1,8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -15 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{b}^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2,4 \\ -1,8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad m = 0,6 \,, \quad b = 0,7$$

Aufgabe 3

a) • Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bare Funktionen und seien f', g' stetig, dann gilt

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx + f(x)\, g(x) \Big|_a^b$$

• Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig diff'bare Funktion mit $\varphi([a,b]) \subseteq [c,d]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\, ds$$

b)

$$A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^0\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^1\, dx = -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

c) Sei $n \geq 1$.

$$A_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+1}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \sin(x)\, dx$$

$$\text{P.I.} \rightarrow = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} n\, (\sin(x))^{n-1} \cos(x)\, (-\cos(x))\, dx + \underbrace{(\sin(x))^n\, (-\cos(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\, (\sin(x))^{n-1}\, (\cos(x))^2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\, (\sin(x))^{n-1}\, (1 - (\sin(x))^2)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\, (\sin(x))^{n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\, (\sin(x))^{n+1}$$

$$= n\, A_{n-1} - n\, A_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad A_{n+1} = \frac{n}{n+1} A_{n-1}.$$

d) (IA) $n=0$ $\qquad \mathcal{A}_{2\cdot 0} = \mathcal{A}_0 \overset{b)}{=} \frac{\pi}{2}$ ✓

(IS)

Induktionsannahme: $\mathcal{A}_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$\mathcal{A}_{2(n+1)} = \mathcal{A}_{2n+2}$

$\overset{c)}{=} \mathcal{A}_{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$

$\overset{\text{I.-annahme}}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$= \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \cdot \frac{2(n+1)-3}{2(n+1)-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

(IA) $n=0$ $\qquad \mathcal{A}_{2\cdot 0+1} = \mathcal{A}_1 \overset{b)}{=} 1$

(IS) Induktionsannahme: $\mathcal{A}_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

$\mathcal{A}_{2(n+1)+1} = \mathcal{A}_{2n+3}$

$\overset{c)}{=} \mathcal{A}_{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+3}$

$\overset{\text{Ind.annahme}}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2(n+1)-2}{2(n+1)-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

Aufgabe 4

a) Wir schreiben $u := \dot{x}$.

Damit gilt:

i) $\dot{u} = \ddot{x} = -\frac{b}{a}\dot{x} - \frac{c}{a}x = -\frac{b}{a}u - \frac{c}{a}x$

ii) $\dot{x} = u$

Wir erhalten also das System erster Ordnung:

$$\dot{x} = u$$
$$\dot{u} = -\frac{b}{a}u - \frac{c}{a}x$$

b) Wie in a) gezeigt ist die DGL äquivalent zu einem linearen System erster Ordnung. Die Aussage folgt dann aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

c) Wir verwenden die Lösungsformel aus der Vorlesung für Variation der Konstanten bei linearen DGL:

$$x(t) = e^{\int_0^t (s+1)\,ds}\left(2 + \int_0^t e^{\frac{1}{2}s^2} e^{-\int_0^s (z+1)\,dz}\,ds\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2+t}\left(2 + \int_0^t e^{\frac{1}{2}s^2} e^{-\frac{1}{2}s^2 - s}\,ds\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2+t}\left(2 + (-e^{-s})\Big|_0^t\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2+t}\left(3 - e^{-t}\right)$$

Aufgabe 5

a) A ist ein Doppelkegel in y-Richtung mit sich im Ursprung befindenden Spitzen.

B_α ist eine ~~Kugel~~ Kugel mit Radius 5 um $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

b)

Wir betrachten

$$g_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+z^2-y^2 \\ x^2+(y-\alpha)^2+z^2-25 \end{pmatrix}$$

Dann ist $A \cap B_\alpha = g_\alpha^{-1}(0,0)$.

Es gilt:

$$Dg_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 2x & 2(y-\alpha) & 2z \end{pmatrix}$$

$Dg_\alpha(x,y,z)$ hat also nicht vollen Rang, falls

$$x = z = 0 \quad \text{oder} \quad \underbrace{2(y-\alpha)+2y}_{4y-2\alpha} = 0$$

Es gilt $(0,0,0) \in A \cap B_5$.

Damit ist die Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen nicht anwendbar für $A \cap B_5$.

Für $A \cap B_1$ gilt: Für alle $(x,y,z) \in A \cap B_1$ gilt $x \neq 0$ oder $z \neq 0$.

Sei nun $(x,y,z) \in A \cap B_1$ s.d.

$$4y - 2 = 0 \iff y = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2+z^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2+z^2 = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \neq 25 \ \lightning$$

Also hat Dg_1 vollen Rang auf $A \cap B_1$ und die Folgerung ist anwendbar.

c) Man bemerke

$$x^2 + z^2 = y^2$$
$$\wedge \quad x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + z^2 = y^2$$
$$\wedge \quad y^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + z^2 = y^2$$
$$\wedge \quad (y = 4 \vee y = -3)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + z^2 = 16 \wedge y = 4) \vee (x^2 + z^2 = 9 \wedge y = -3)$$

Damit können wir die folgenden Parametrisierungen angeben:

$$\varphi_1(\Theta) = (4 \sin\Theta, 4, 4 \cos\Theta)$$
$$\varphi_2(\Theta) = (3 \sin\Theta, -3, 3 \cos\Theta)$$

d) Wir berechnen

$$\varphi_1'(\Theta) = (4 \cos\Theta, 0, 4(-\sin\Theta))$$
$$\varphi_2'(\Theta) = (3 \cos\Theta, 0, 3(-\sin\Theta))$$

Damit ergibt sich für $(x, y, z) \in A \cap B_1$

$$T_{(x,y,z)} A \cap B_1 = \left\langle \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 6

a) Da der Abstand eine nicht negative Funktion und Quadrieren auf nicht negativen Zahlen monoton ist, entsprechen ~~Extrema~~ Minima des Abstands ~~Extrema~~ Minima des quadrierten Abstands.

b)

Wir nutzen die Methode der Lagrange-Multiplikatoren:

Sei
$$g(x,y,z) = \|(x,y,z) - p\|^2 + \lambda\,(x^2 + z^2).$$

Dann ist
$$\nabla g(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x-6 \\ y-7 \\ z-8 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Gesucht sind nun x, y, z und λ s.d. $\nabla g(x,y,z) = 0$.

Wir erhalten die Gleichungen:

(i) $(2+2\lambda)x = 12$

(ii) $2y = 14 \Leftrightarrow y = 7$

(iii) $(2+2\lambda)z = 16$

(iv) $x^2 + z^2 = 25$

Quadrieren und Addieren von (i) und (iii) ergibt mit (iv)

$$(2+2\lambda)^2(x^2+z^2) = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$$
$$\shortparallel$$
$$(2+2\lambda)^2\, 25$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2.$$

Damit ergeben sich mit (i) und (iii) die kritischen Punkte

$$(3, 7, 4) \quad \text{und} \quad (-3, 7, -4).$$

c) Da

$$\| (3,7,4) - (6,7,8) \| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\| (-3,7,-4) - (6,7,8) \| = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

ist der Punkt minimalen Abstands $(3,7,4)$.

Der minimale Abstand beträgt 5.

Aufgabe 7

a) Sei Ω ein stückweise glatt berandetes Gebiet, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ invertierbar und stetig diffe'bar, $Dg(\cdot)$ glchm. stetig auf Ω, $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ glchm. stetig. Dann gilt:

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\, dy = \int_{\Omega} f(g(x))\, |\det Dg(x)|\, dx$$

b) Sei $\varphi : B_1(0) \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y,z) = (\sqrt{a}\,x, \sqrt{b}\,y, \sqrt{c}\,z)$. Dann ist $M = \varphi(B_1(0))$.

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(M) = \int_M 1\, dx$$

$$= \int_{\varphi(B_1(0))} 1\, dx$$

$$= \int_{B_1(0)} |\det D\varphi(x)|\, dx$$

$$= \int_{B_1(0)} \sqrt{a \cdot b \cdot c}\, dx$$

$$= \sqrt{a \cdot b \cdot c}\, \mathrm{Vol}(B_1(0)) = \frac{4}{3}\pi \sqrt{a \cdot b \cdot c}.$$

c)

Da $\mathrm{Vol}(\text{Straße}) = \mathrm{Vol}(\tilde{\gamma}([0,T] \times [-a,a]))$ $(*)$

wollen wir erneut den Trafo-Satz anwenden.

Dafür berechnen wir zunächst

$$\nabla \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 - r\ddot{\gamma}_2 & -\dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_2 + r\ddot{\gamma}_1 & \dot{\gamma}_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det \nabla \tilde{\gamma} = \dot{\gamma}_1^2 - r\ddot{\gamma}_2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2^2 + r\ddot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2$$

γ nach Bogenlänge parametrisiert $\overset{}{=} 1 + r(\ddot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2 - \ddot{\gamma}_2\dot{\gamma}_1)$

Aus (*) und dem Trafo-Satz folgt

$$\mathrm{Vol}(\text{Straße}) = \int_{[0,T]\times[-a,a]} 1 + r(\ddot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 - \ddot{\gamma}_2 \dot{\gamma}_1)$$

$$= \int_0^T \int_{-a}^a 1 + r(\ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \ddot{\gamma}_2(t)\dot{\gamma}_1(t))\, dr\, dt$$

$$= \int_0^T 2a + \underbrace{\tfrac{1}{2} r^2 (\ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \ddot{\gamma}_2(t)\dot{\gamma}_1(t))\Big|_{-a}^{a}}_{=0}\, dt$$

$$= 2Ta$$

Aufgabe 8

a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ eine glatte Fläche, mit $N(x)$ bezeichnen wir die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig diff'bares Vektorfeld auf $\bar{\Omega}$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot N(x) \, da$$

b)

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dl$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_K 3x^2 + 3y^2$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3r^2 \cdot r \, d\Theta \, dr$$

$$= 6\pi \quad \frac{1}{4} 2^4 = 24\pi$$

Sei $\varphi(\Theta) = (2\sin\Theta, 2\cos\Theta)$ eine Parametrisierung von ∂K. Dann gilt:

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dl$$

$$= \int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \, dl$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial K} x^4 + y^4$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(2^4 (\sin\Theta)^4 + 2^4 (\cos\Theta)^4 \right) \cdot 2 \, d\Theta$$

$$= 2^4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos(4\Theta) + \frac{3}{4} \, d\Theta$$

$$= 2^4 \quad \frac{6\pi}{4} = 24\pi$$

Aufgabe 9: (i) Gegeben Sei $z \in \mathbb{C}$ in der Darstellung

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}.$$

a) Berechnen Sie in dieser Darstellung z^8, d.h. geben Sie s, θ in Abhängigkeit von r und φ an, so dass $z^8 = s \cdot e^{i \cdot \theta}$. *(2 Punkte)*

b) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $z^8 = 1$? Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ an. *(2 Punkte)*

(ii) Betrachten Sie die Funktion f, die auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 2 - \frac{2}{\pi}x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \\ -4 + \frac{2}{\pi}x, & x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \end{cases}$$

definiert ist, und anschließend 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 4\pi)$. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Koeffizienten zu einer Approximation dieser Funktion mittels Schneller Fouriertransformation (FFT) für 4 Punkte auf dem Intervall $[0, 2\pi)$. *(4 Punkte)*

LÖSUNG:

(i) a)

$$z^8 = (r \cdot e^{i \cdot \varphi})^8 = r^8 \cdot e^{i(8 \cdot \varphi)}$$

$$\Rightarrow \quad s = r^8$$

$$\theta = 8 \cdot \varphi$$

b)

$z^8 = 1$ hat 8 Lösungen.

Da $z^8 = 1$ folgt $|z^8| = 1$ und damit $|z| = 1$, d.h. $r = 1$.

Somit bleibt die Bestimmung von 8 Winkel, so dass $e^{i \varphi \cdot 8} = 1$

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi.$$

Aufgabe 10: a) Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Kurve γ für $t \in [-\pi, \pi]$. *(3 Punkte)*
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\gamma(t)$ für $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$ und nutzen Sie danach die Achsensymmetrie bzgl. der x-Achse aus.

b) Berechnen Sie $\dot{\gamma}$ für die Kurve γ aus Teil a). *(1 Punkt)*

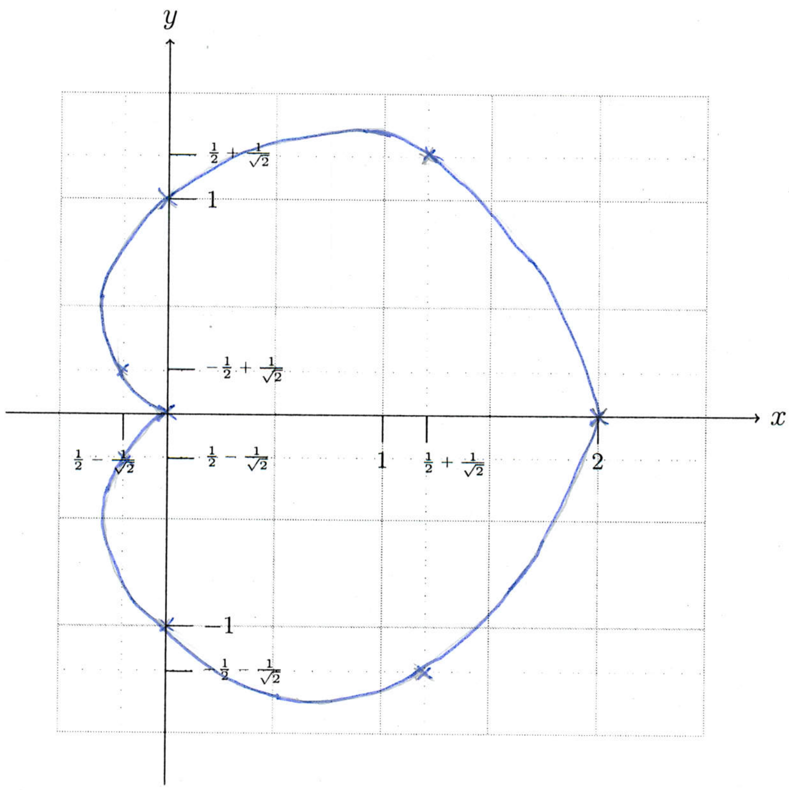
c) Wie ist die Länge einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ definiert?
Berechnen Sie die Länge der Kurve γ aus Teil a). *(3 Punkte)*
Hinweis: Es gilt $|\cos(\frac{1}{2}x)| = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(x))}$.

d) Betrachten Sie einen Kreis mit Radius r um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine Bogenlängenparametrisierung dieses Kreises an. *(1 Punkt)*

e) Wie ist die Krümmung (mit Vorzeichen!) einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ definiert?
Berechnen Sie die Krümmung des Kreises mit Radius r aus d). *(1+1 Punkte)*

LÖSUNG:

a)



Aufgabe 10

b) $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + (1+\cos(t)) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

c) Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar. Dann gilt

$$\ell(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}(t)| \, dt.$$

Für die Kurve aus a) gilt also:

$$\ell(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin(t)^2 + (1+\cos(t))^2} \, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos(t)} \, dt$$

$$= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos(t)}{2}} \, dt$$

$$= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| dt$$

$$= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$$

$$= 4 \sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 8.$$

d)

$$\gamma(\theta) = r\left(\sin\left(\tfrac{\theta}{r}\right), \cos\left(\tfrac{\theta}{r}\right)\right)$$

e) Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve γ gilt

$$\varkappa(t) = \ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \ddot{\gamma}_2(t)\dot{\gamma}_1(t).$$

Für eine reguläre Kurve gilt

$$\varkappa(t) = |\dot{\gamma}(t)|^{-3} \left(\ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \ddot{\gamma}_2(t)\dot{\gamma}_1(t)\right)$$

Für die Kurve aus d) gilt:

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{r}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{r}\right)\right)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{1}{r}\left(-\sin\left(\frac{\theta}{r}\right), -\cos\left(\frac{\theta}{r}\right)\right)$$

$$\varkappa(t) = \frac{1}{r}\left(\sin(t)^2 + \cos(t)^2\right) = \frac{1}{r}.$$