

Aufgabe 1: Betrachten Sie die folgenden Rotationen einer Sphäre S : Man drehe S um die y -Achse um den Winkel $\pi/2$, anschließend macht man dieselbe Operation um die z -Achse und rotiert zum Schluss noch einmal um $\pi/2$ um die x -Achse.

- Schreiben Sie die Matrix zu jeder Operation auf.
- Geben Sie die Matrix von der gesamten Operation an.
- Was hat man eigentlich getan?

LÖSUNG: Wir nehmen an, dass alle Drehungen in mathematisch positiver Drehrichtung ("Rechte-Faust-Regel" in rechthändigen Koordinatensystem) durchgeführt werden.

a) Sei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

die kanonische Basis des \mathbb{R}^3 , f , g , und h die drei Transformationen (Abbildungen):

f sei die Rotation um die y -Achse, das heißt $f(e_2) = e_2$.

Der Rotationswinkel von f ist $\pi/2$, dadurch bekommen wir $f(e_3) = e_1$ und $f(e_1) = -e_3$.

Die Matrix von f ist dann

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

g sei die Rotation um die z -Achse und h die Rotation um die x -Achse. Durch die gleichen Überlegungen bekommen wir, dass die Matrizen zu diesen Abbildungen

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

und

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

sind.

b) Nennen wir nun die gesamte Abbildung k , $k = h \circ g \circ f$ und somit ist ihre Matrix

$$M_k = M_h \cdot M_g \cdot M_f \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

c) Wir merken, dass wir einfach unser Objekt um mit dem Winkel $\pi/2$ um die z -Achse gedreht haben.