Aufgabe 5: Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2 + y^3$ besitzt im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja ☐ nein ☐

b) Die Funktion $f_1(x,y) = x^2 + y^3$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Extremum. ja ☐ nein ☐

c) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ einen kritischen Punkt. ja ☐ nein ☐

d) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

e) Die Funktion $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0,0)$ ein globales Minimum. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:Die Antworten lauten: a) Ja! b) Nein! c) Ja! d) Ja! e) Nein!
Für a) und b) beachtet man dazu $\mathrm{grad} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$, woraus sich ergibt, dass $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von f_1 ist. Wegen $D^2 f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ und $D^2 f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_1(0,0)$ positiv semidefinit ist, aber für diesen Fall gilt kein allgemeines Kriterium. Aber $f_1(0,t) = t^3$ zeigt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt, da t^3 negativ ist für $t < 0$, $= 0$ für $t = 0$ und positiv ist für $t > 0$.
Für c), d) und e) beachtet man $\mathrm{grad} f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 4y^3 \end{pmatrix}$, woran man erkennt, dass $(0,0)$ kritischer Punkt von f_2 ist. Wegen $D^2 f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 12y^2 \end{pmatrix}$ und $D^2 f_2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_2(0,0)$ positiv definit ist, und demnach ein (lokales) Minimum bei $(0,0)$ liegt mit dem Wert $f_2(0,0) = 0$. Aber es gilt auch $f_2(0,\pm 1) = 0$ und $f_2(0,\pm 2) = -12$. Dies zeigt, dass es sich nicht um ein globales Minimum handelt.