Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x_1 x_2.$$

a) Berechnen Sie den kritischen Punkt x^* der Funktion $f(x)$.

b) Berechnen Sie die Hessesche $D^2 f(x^*)$ der Funktion f an der Stelle x^*.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_i und zugehörige Eigenvektoren v_i der Matrix $D^2 f(x^*)$.

d) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Funktion

$$g_i(t) = f(x^* + t v_i).$$

Bemerkung: Gilt $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ so folgt daraus, dass g_1 in $t = 0$ ein Maximum und g_2 in $t = 0$ ein Minimum hat. Daraus folgt, dass die Funktion f an der Stelle x^* einen Sattelpunkt besitzt.

LÖSUNG:

a)

$$\operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ kritischer Punkt $x^* = (0, 0)$

b)

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D^2 f(x^*)$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -\lambda y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \lambda y_2 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -\lambda^2 y_2 + y_2 = 0 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} (1-\lambda^2) y_2 = 0 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

d)

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= f(-t, t) \\
&= -t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= f(t, t) \\
&= t^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: Betrachten Sie die Funktion

$$
\begin{aligned}
& f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
& (x, y) \mapsto f(x, y) := (y^3 - y) \cdot (e^x + e^{-x})
\end{aligned}
$$

a) Bestimmen Sie lokale Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

LÖSUNG:

a) Kritische Punkte von f sind die Nullstellen des Gradienten:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^3 - y)(e^x - e^{-x}) \\ (3y^2 - 1)(e^x + e^{-x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} y(y^2 - 1)(e^x - e^{-x}) \\ (3y^2 - 1)(e^x + e^{-x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & x = 0 \text{ und } y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Die Hessesche Matrix ist

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (y^3 - y)(e^x + e^{-x}) & (3y^2 - 1)(e^x - e^{-x}) \\ (3y^2 - 1)(e^x - e^{-x}) & 6y(e^x + e^{-x}) \end{pmatrix}$$

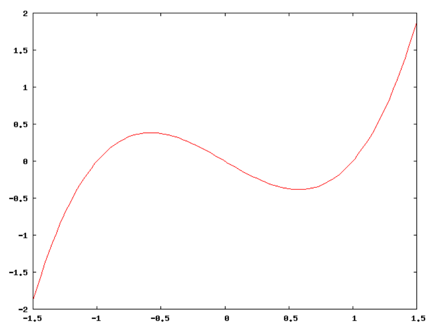
Also

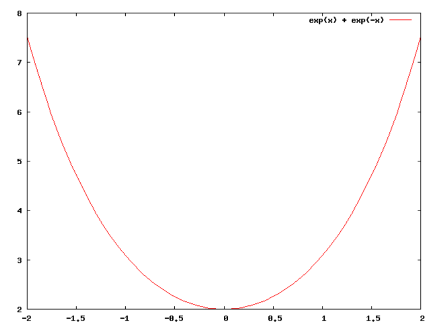
$$(x,y) = (0, +\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$(x,y) = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

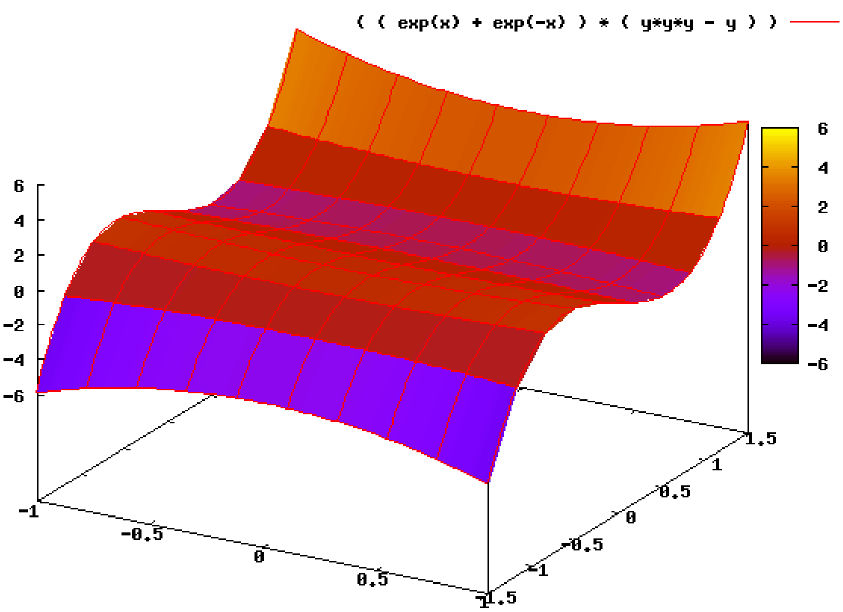
Die Hesse-Matrix ist in beiden Fällen indefinit und beide Punkte $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ sind Sattelpunkte.

b) Wir plotten zunächst die beiden Faktoren von f separat:





und nun den Graphen der gesamten Funktion:



Bemerkung: Für konstantes $y = y_0$ ist $f(x, y_0) = K(e^x + e^{-x})$.