Aufgabe 8: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x = y = 0 \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \ \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechne Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f(0,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x,0)$ mit Hilfe von Differenzenquotienten. Berechnen Sie anschließend $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$.

Lösung:

$$\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{f(h,y)}{h} = y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}$$

Für $y \neq 0$ gilt:

$$y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} \to y\frac{-y^2}{y^2} = -y \qquad \text{für } h \to 0.$$

Für $y = 0$ gilt:

$$\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,y) = -y$$

$$\frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \frac{f(x,h)}{h} = x\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2}$$

Für $x \neq 0$ gilt:

$$x\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} \to x\frac{x^2}{x^2} = x \qquad \text{für } h \to 0.$$

Für $x = 0$ gilt:

$$\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = \frac{-h^2}{h^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,0) = x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(-y)\Big|_{y=0} = -1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(x)\Big|_{x=0} = 1$$

Aufgabe 9: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(x+y).$$

Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion f im Punkt $(0,0)$ mit Restglied der Ordnung 4.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x_0+\xi, y_0+\zeta) = {} & f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)\xi + \partial_y f(x_0,y_0)\zeta \\ & + \partial_y\partial_x f(x_0,y_0)\xi\zeta + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(x_0,y_0)\xi^2 + \frac{1}{2}\partial_y^2 f(x_0,y_0)\zeta^2 \\ & + \frac{1}{2}\partial_y^2\partial_x f(x_0,y_0)\xi\zeta^2 + \frac{1}{2}\partial_y\partial_x^2 f(x_0,y_0)\xi^2\zeta + \frac{1}{6}\partial_x^3 f(x_0,y_0)\xi^3 + \frac{1}{6}\partial_y^3 f(x_0,y_0)\zeta^3 \\ & + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^4\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= -\sin(x+y) = \partial_y f(x,y) \\ \partial_x^2 f(x,y) &= -\cos(x+y) = \partial_y^2 f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) \\ \partial_x^3 f(x,y) &= \sin(x+y) = \partial_y^3 f(x,y) = \partial_y\partial_x^2 f(x,y) = \partial_x\partial_y^2 f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\xi,\zeta) &= 1 - \xi\zeta - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^4\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^4\right) \end{aligned}$$