Aufgabe 10: Sei K ein Doppelkegel mit einem Öffnungswinkel von 90°, vom Ursprung aus in z-Richtung geöffnet, gegeben durch

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

und P eine Ebene gegeben durch

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Die Mengen $P \cap K$ bezeichnet man als Kegelschnitte.
Welches Objekt ergibt sich für den Kegelschnitt in den folgenden Fällen?

a) $a = b = 0,\ c = 1,\ d = 1$

b) $a = c = \frac{\sqrt{2}}{2},\ b = 0,\ d = 1$

c) $a = \frac{3}{5},\ b = 0,\ c = \frac{4}{5},\ d = 1$

LÖSUNG:

a) Im Fall $c = 1$, $a = b = 0$ und $d = 1$ lässt sich die Ebene P schreiben als

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$$

Setzen wir nun $z = 1$ ein in die Kegelgleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, so ergibt sich $x^2 + y^2 = 1$. Die Schnittmenge $P \cap K$ ist also gegeben durch

$$P \cap K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 1\}.$$

Das ist ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ in der Ebene $z = 1$.

b) Im Fall $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 0$ und $d = 1$ lässt sich die Ebene schreiben als

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 1\}.$$

Alternativ kann man diese Ebene auch schreiben als

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \\ y &= \alpha, \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Kegelgleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right)^2 + \alpha^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right)^2 \\
\alpha^2 &= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\beta = 2\beta \\
\beta &= \frac{1}{2}\alpha^2
\end{aligned}$$

und damit eine Parabel in dem durch die beiden Richtungsvektoren vorgegebenen (orthonormalen) Koordinatensystem.

Bemerkung: Hier wurde der Stützvektor der Ebene so gewählt, dass er im Scheitelpunkt der Parabel liegt. Dadurch ist die Form der Parabelgleichung besonders einfach.

c) Im Fall $c = \frac{4}{5}$, $a = \frac{3}{5}$, $b = 0$ und $d = 1$ lässt sich die Ebene schreiben als

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z = 1\}.$$

Alternativ kann man diese Ebene auch schreiben als

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{15}{7} \\ 0 \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{15}{7} + \frac{4}{5}\beta, \\
y &= \alpha, \\
z &= \frac{20}{7} - \frac{3}{5}\beta.
\end{aligned}$$

Setzt man dies in die Kegelgleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{15}{7} + \frac{4}{5}\beta\right)^2 + \alpha^2 &= \left(\frac{20}{7} - \frac{3}{5}\beta\right)^2 \\
\alpha^2 + \frac{16 - 9}{25}\beta^2 &= \frac{20^2 - 15^2}{49} - \beta\left(2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{7} - 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{7}\right) \\
\alpha^2 + \frac{7}{25}\beta^2 &= \frac{25}{7} \\
\frac{7}{25}\alpha^2 + \frac{7^2}{25^2}\beta^2 &= 1
\end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Ellipse in der Ebene P mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} -\frac{15}{7} \\ 0 \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}$ und

Halbachsen der Länge $\frac{5}{\sqrt{7}}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Länge $\frac{25}{7}$ in Richtung $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Auch hier wurde der Stützvektor der Ebene zur Vereinfachung der Rechnung geschickt gewählt.