Aufgabe 12: Sei $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf einer Fläche M. An den Stellen $y \in M$ sei $n(y)$ eine Normale an M.
Falls x bogenlängenparametrisiert ist, so gilt:

$$x \text{ ist geodätische Kurve } \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = (\ddot{x}(t) \cdot n(x(t)))\, n(x(t)).$$

a) Zeigen Sie, daß der Äquator auf der Einheitssphäre eine geodätische Kurve ist.

b) Zeigen Sie, daß alle Schraubenlinien geodätische Kurven auf den jeweiligen Zylindern sind.

Lösung:

a) Eine Parametrisierung des Äquators der Einheitskugel ist gegeben durch

$$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Bogenlängenparametrisierung, denn

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1.$$

Zudem gilt

$$n(x(t)) = n(t) = x(t)$$

und

$$\ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = -x(t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\ddot{x}(t) \cdot n(t))\, n(t) &= \left(-\cos^2(t) - \sin^2(t)\right) n(t) \\ &= -n(t) \\ &= \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

und somit ist der Äquator der Einheitskugel eine geodätische Kurve.

b) Eine Bogenlängenparametrisierung einer Schraubenlinie ist gegeben durch

$$x : [0, \sqrt{r^2 + h^2}] \to \mathbb{R}^3,\ x(t) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ r \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} h \end{pmatrix},$$

denn

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{pmatrix}$$

und

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\frac{r^2}{r^2+h^2}\left(\sin^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} + \cos^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) + \frac{h^2}{r^2+h^2}} = 1.$$

$$\ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{r^2+h^2} \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ -\frac{r}{r^2+h^2} \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n(x(t)) = n(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ \sin \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (\ddot{x}(t) \cdot n(t))\, n(t) &= \left(-\frac{r}{r^2+h^2} \cos^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}} - \frac{r}{r^2+h^2} \sin^2 \frac{t}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) n(t) \\ &= -\frac{r}{r^2+h^2} n(t) \\ &= \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

und somit sind Schraubenlinien geodätische Kurven auf den entsprechenden Zylindern.