Aufgabe 1: Welche Kurve Γ beschreibt die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, 2]$ gilt?
Berechnen Sie die Länge der Kurve Γ.

LÖSUNG: Die Kurve Γ ist eine Schraubenlinie um die z-Achse, die im Punkt $(1, 0, 0)$ startet, den Radius 1 hat und innerhalb von zwei Umdrehungen die Höhe 2 erreicht. Die Länge l der Kurve Γ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^2 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \\ &= \int_0^2 \left\| \begin{pmatrix} -2\pi \sin(2\pi t) \\ 2\pi \cos(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{4\pi^2 \left(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\right) + 1} \, dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{4\pi^2 + 1} \, dt \\ &= 2\sqrt{4\pi^2 + 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \cosh x$. Berechnen Sie die Länge des Graphen von g zwischen den Punkten $(-1, \cosh(-1))$ und $(1, \cosh(1))$.
Tipp: $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

LÖSUNG: Der Graph der Funktion g ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{g}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}$$

Also können wir die Länge l des Graphen von g zwischen den beiden Punkten

$(-1, \cosh(-1))$ und $(1, \cosh(1))$ wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \dot{g}^2(t)}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2 t}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \cosh t \, dt \\ &= \sinh t \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Graph von cosh wird auch als *Katenoide* bezeichnet. Er beschreibt den Verlauf eines Seils, das an zwei Punkten aufgehangen wird.