Aufgabe 1: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung näherungsweise mit MATLAB unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens

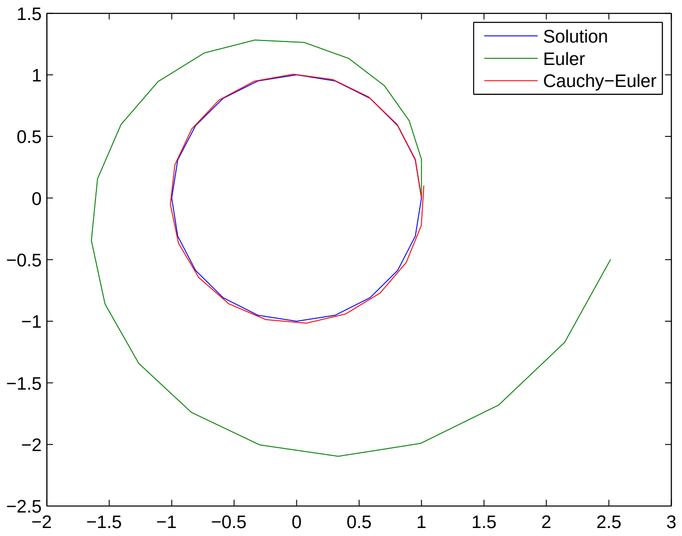
b) des Cauchy-Euler-Verfahrens

für $t \in [0, 2\pi]$. Verwenden Sie die konstante Zeitschrittweite $\tau = \frac{2\pi}{20}$. Zeichen Sie die Lösungskurve und ihre beiden Approximationen. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler zur Zeit 2π für $\tau = \frac{2\pi}{20}$, $\tau = \frac{2\pi}{40}$ sowie $\tau = \frac{2\pi}{80}$.

LÖSUNG:

```
% compare Euler and Cauchy-Euler ODE solvers
function ode_compare

% initial value
x0 = [1 0];
% end time
T = 2*pi;
% time intervals
N = 20;

% right hand side of ODE
function x_prime = f ( t, x )
x_prime (1) = -x (2);
x_prime (2) =  x (1);
end

% compute one explicit Euler step
function x_new = eulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime = f ( t, x_old );
x_new = x_old + tau * x_prime;
end

% compute one explicit Cauchy-Euler step
function x_new = cauchyeulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime_old = f ( t, x_old );
x_mid = x_old + 0.5 * tau * x_prime_old;
```

```
x_prime_mid = f ( t + 0.5 * tau, x_mid );
x_new = x_old + tau * x_prime_mid;
end

% compute timestep size
tau = T / N;
% initialize
xe (1, :) = x0; % Euler solution
xc (1, :) = x0; % Cauchy-Euler solution

% compute time steps with both methods
for i = 1 : N
    xe (i+1, :) = eulerstep (xe (i, :), (i-1) * tau, tau);
    xc (i+1, :) = cauchyeulerstep (xc (i, :), (i-1) * tau, tau);
end

% compute correct solution
ts = 0 : tau : T;
xs (:, 1) = cos (ts);
xs (:, 2) = sin (ts);

% plot results
plot (xs (:, 1), xs (:, 2), xe (:, 1), xe (:, 2), xc (:, 1), xc (:, 2));
legend ('Solution', 'Euler', 'Cauchy-Euler');

% error
euler_error = norm (xs (N, :) - xe (N, :))
cauchy_euler_error = norm (xs (N, :) - xc (N, :))
end
```



Für den Fehler gilt

	$\tau = \frac{2\pi}{20}$	$\tau = \frac{2\pi}{40}$	$\tau = \frac{2\pi}{80}$
Euler	1.4741	0.6118	0.2753
Cauchy-Euler	0.0990	0.0252	0.0064

Aufgabe 2: Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, und/oder beschränkt sind:

a) $B_1(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < 1\}$

b) $B_1(0) \backslash B_1((1, 0, \ldots, 0))$

c) $\mathbb{R}^n \backslash (B_1(0) \cup B_1((2, 0, ..., 0)))$

d) $B_1(0) \cap B_1((1, 0, \ldots, 0))$

LÖSUNG:

a) $B_1(y)$ ist offen und beschränkt.

b) $B_1(0) \backslash B_1((1, 0, \ldots, 0))$ ist weder offen noch abgeschlossen, sondern nur beschränkt.

c) $\mathbb{R}^n \backslash (B_1(0) \cup B_1((2, 0, ..., 0)))$ ist abgeschlossen, denn sowohl $B_1(0)$ als auch $B_1((2, 0, ..., 0))$ sind offen, die Vereinigung offener Mengen ist wieder offen und $\mathbb{R}^n$ ohne eine offene Menge ist abgeschlossen. Die Menge ist allerdings nicht beschränkt.

d) $B_1(0) \cap B_1((1, 0, \ldots, 0))$ ist offen, denn der Schnitt zweier offener Mengen ist offen. Zudem ist die Menge beschränkt.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) := \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy.$$

LÖSUNG:

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy\,.$$

Leibniz-Regel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_{-x^2}^{x^2} \cos(xy)\,dy + \frac{\sin(x^3)}{x^2}\cdot 2x - \frac{\sin(-x^3)}{-x^2}\cdot(-2x) \\
&= 2\frac{\sin(x^3)}{x} + 2\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{1}{x}\int_{-x^3}^{x^3} \cos z\,dz \quad (z = xy,\ dz = x\,dy) \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{\sin z}{x}\Big|_{-x^3}^{x^3} \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{\sin(x^3)}{x} - \frac{\sin(-x^3)}{x} \\
&= 6\frac{\sin(x^3)}{x}
\end{aligned}$$

Benutzt: $\sin(-x^3) = -\sin(x^3)$

Aufgabe 4: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right)\,du$$

definierte Funktion.

a) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Lösung:

a) Nach der Leibniz-Regel für das Ableiten von parameterabhängigen Integralen mit variablen Grenzen (siehe Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{1}{k}\ f(t)\ \sin\left(k(t-t)\right) + \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\ \cos\left(k(t-u)\right)\,k\ du \\
&= \int_0^t f(u)\ \cos\left(k(t-u)\right)\,du\ .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\sin 0 = 0$ benutzt.

Wendet man die Leibniz-Regel nocheinmal an, so erhält man

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= f(t)\ \cos\left(k(t-t)\right) - k\int_0^t f(u)\ \sin\left(k(t-u)\right)\,du \\
&= f(t) - k^2 x(t)\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir $\cos 0 = 1$ beachtet haben.

b) Offensichtlich ergibt sich aus dem vorhergehenden, daß die Funktion $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$ ist.

Die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ergeben sich ebenfalls unmittelbar (aus der Definition von $x(t)$ als Integral bzw. der berechneten Formel für $\dot{x}(t)$ als Integral und der Tatsache, daß

$$\int_a^a g(t)\, dt = 0$$

ist für jede integrierbare Funktion $g = g(t)$).