Aufgabe 1: Bestimmen Sie zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ eine Diagonalmatrix ist.
Tipp: Wenn die Spalten von $\mathbf{P}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind, so gilt wie bei symmetrischen Matrizen $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix aus den entsprechenden Eigenwerten von $\mathbf{A}$ ist. Man muss also geeignet viele linear unabhängige Eigenvektoren finden, so dass $\mathbf{P}$ invertierbar ist.
Probieren Sie die Teiler des konstanten Gliedes um die erste Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu bestimmen.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Fläche mit der Darstellung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ein Ellipsoid ist und bestimmen Sie dessen Hauptachsen.

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \qquad & x_1 = 1, \\ x_{n+1} \quad = & \quad x_n + x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, die sogenannten Fibonacci-Folge.

Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = Ay_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt berechnen zu können, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.
Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass es für 2×2 Matrizen eine Formel zum Berechnen der inversen Matrix gibt.
Zur Kontrolle:

$$A = BDB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.

Aufgabe 4: Gegeben ist das Skalarprodukt

$$g(v, w) = \int_0^{2\pi} v(x)w(x)\,dx$$

auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

a) Man zeige, dass die Funktionen 1, $\cos(x)$ und $\cos(2x)$ richtig skaliert ein ON-System bilden. Was ist die Skalierung?
Tipp: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right)$. Stellen Sie die Funktion in Termen der obigen Basis dar und berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalität $\|f\|_g^2 = g(f, f)$.