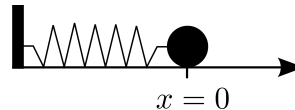


**Aufgabe 1:** Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2:** Betrachten Sie den in der Skizze dargestellten Fall.



Bewegen wir die Kugel der Masse  $m$  nach links oder rechts und lassen sie los, so versetzen wir das System in Schwingungen. Die Reibungskräfte vernachlässigen wir. Bei Auslenkung der Kugel nach rechts oder links übt die Feder die (Rückstell-) Kraft  $F = -Dx$  auf die Kugel aus, die mittels  $F = m\ddot{x}$  zu einer Beschleunigung der Kugel führt. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x.$$

- a) Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.
- b) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Systems, die sich zusammensetzt aus der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  der Kugel und der (in der Dehnung der Feder gespeicherten) elastischen Energie  $E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}Dx^2$  konstant ist.

- Aufgabe 3:**
- a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Bewegung eines Satelliten um die Erde ohne Berücksichtigung des Mondes beschreibt. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt.
  - b) Eine geostationäre Umlaufbahn ist (näherungsweise) eine Kreisbahn in Äquatorebene. Geben Sie eine Parametrisierung für eine beliebige Kreisbahn in Äquatorebene um den Ursprung an, die Radius  $r$  hat und in der Zeit  $T$  einmal die Erde umkreist hat. Den Startpunkt können Sie z.B. als  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  wählen.
  - c) Zeigen Sie, dass diese Kurve für geeignete  $r, T$  die Differentialgleichung löst. Welche Bedingung ergibt sich dabei für  $r$  und  $T$ ?
  - d) Ein geostationärer Satellit umkreist die Erde innerhalb eines siderischen Tages (23 h 56 m 4 s). Die Erdmasse beträgt  $5,9736 \cdot 10^{24}$  kg. Berechnen Sie den Radius der geostationären Umlaufbahn.
  - e) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Satelliten in geostationärer Umlaufbahn?

**Aufgabe 4:** Welche der folgenden Aussagen sind richtig für die Differentialgleichung

$$\dot{y} = \sqrt{y}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+?$$

- a) Die rechte Seite  $f(y) = \sqrt{y}$  genügt einer globalen Lipschitz-Bedingung. ja ☐ nein ☐
- b) Die rechte Seite  $f(y) = \sqrt{y}$  genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung für alle Intervalle  $[a, b]$  mit  $0 < a < b$ . ja ☐ nein ☐
- c) Durch die Vorgabe  $y(0) = 1$  ist eine Lösung lokal eindeutig bestimmt. ja ☐ nein ☐
- d) Zu der Vorgabe  $y(0) = 0$  existiert eine eindeutige Lösung in einer Umgebung von  $t_0 = 0$ . **Tipp:**  $y(t) = \alpha^2 t^2$ . ja ☐ nein ☐