Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(4+3i)+2(6-2i)=?$

b) $(4+3i)(6-2i)=?$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=?$ Interpretieren Sie dies geometrisch!

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}(4+3i)+2(6-2i) &= 4+3i+12-4i\\ &= 16-i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(4+3i)(6-2i) &= 24+18i-8i+6\\ &= 30+10i\end{aligned}$$

c) Umrechnung in Polarkoordinaten.

$$r=\frac{\sqrt{3+1}}{2}=1, \qquad \sin\phi=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi=\frac{\pi}{6}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=i.$$

Wegen $r=1$ handelt es sich bei der Multiplikation um eine reine Drehung in der komplexen Zahlenebene, und zwar um den Winkel $\phi=\frac{\pi}{6}$. Daher wird 1 drei mal um jeweils 30°, also insgesamt um 90° nach links gedreht.

Alternativ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 &= \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= i\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^3 = -8$

b) $z^2 = i$

c) $z^4 = -16$

d) $z = \frac{2+i}{2-i}$

<u>Achtung:</u> Berechnen Sie alle Lösungen!

LÖSUNG:

a) $z^3 = -8$ hat 3 Lösungen.

$$\begin{array}{lllllll}
z^3 = -8 = 8e^{i\pi} & & & = 8e^{3i\pi} & & = 8e^{5i\pi} \\
\Leftrightarrow \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{3i\frac{\pi}{3}} & & \text{oder} & z = 2e^{5i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{i\pi} & & \text{oder} & z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow \quad z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) & \text{oder} & z = -2 & & \text{oder} & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow \quad z = 2\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) & \text{oder} & z = -2 & & \text{oder} & z = 2\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\
\Leftrightarrow \quad z = 1 + i\sqrt{3} & \text{oder} & z = -2 & & \text{oder} & z = 1 - i\sqrt{3}
\end{array}$$

Alternativ: 1. Lösung ist klar: $\boxed{z_1 = -2}$: $(-2)^3 = -8$ ✓ Polynomdivision:

$$\begin{array}{rcrcl}
(z^3 & + & 8) & : (z+2) = & z^2 - 2z + 4 \\
-(z^3 & + & 2z^2) & & \\
\hline
-2z^2 & + & 8 & & \\
-(-2z^2 & - & 4z) & & \\
\hline
 & & 4z & + 8 & \\
 & & -(4z & + 8) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Probe: $(z^2 - 2z + 4)(z + 2) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$ ✓

Berechnung der 2. und 3. Lösung:

$$\begin{aligned}
z^2 - 2z + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 1 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - 3i^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z - 1 - i\sqrt{3}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{z_2 = 1 + i\sqrt{3}}, \ \boxed{z_3 = 1 - i\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(1+2\sqrt{3}i-3\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2+2\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-i^2\cdot 3\right) = (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark\\
\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1-i\sqrt{3}\right)^2\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2-2\sqrt{3}i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
z^2 = i \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}
$$

c) $z^4 = -16$ hat 4 Lösungen:

Um die Gleichung $z^4 = -16$ zu lösen definieren wir $y := z^2$, so dass die erste Gleichung äquivalent ist zu $y^2 = -16$. Nun lösen wir als erstes die Gleichung $y^2 = -16$ nach y auf.

$$y^2 = -16 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 4i$$

Also müssen wir noch die zwei Gleichungen $z^2 = 4i$ und $z^2 = -4i$ lösen und nutzen dafür das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

$$
\begin{aligned}
z^2 = 4i \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{2}\right)^2 = i\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z^2 = -4i \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{z^2}{4} = i \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{zi}{2}\right)^2 = i \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{zi}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow \quad zi = \pm\sqrt{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}i(1+i) = \pm\sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}
$$

Die vier Lösungen sind also

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}(1+i) \\
z_2 &= -\sqrt{2}(1+i) \\
z_3 &= \sqrt{2}(1-i) \\
z_4 &= \sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}
$$

d) Mittels der Berechnung des multiplikativen Inversen:

$$
\begin{aligned}
(2-i)^{-1} &= \frac{1}{2^2+1^2}(2+i) = \frac{1}{5}(2+i) \\
(2+1)(2-i)^{-1} &= \frac{1}{5}(2+i)(2+i) = \frac{1}{5}(4+4i-1) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
\frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i-1}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} \\
&= \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\,.
\end{aligned}
$$