**Übungen zur Ingenieur-Mathematik II** **SS 2013**
**Blatt 2** **16.04.2013**

**Aufgabe 1:** Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int\limits_0^\pi \sin x \cos x \, dx$

b) $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx$

c) $\int\limits_0^1 x^2 e^x dx$

LÖSUNG:

a)

$$\int\limits_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left. \frac{-\cos 2x}{2} \right|_0^\pi = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

b)

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2} dx = \int\limits_0^1 \left( 1 - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \left( x - \ln(1+x^2) \right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2$$

c)

$$\int\limits_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2x e^x dx = e - (2xe^x)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 2e^x dx = e - 2$$

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int \frac{2x}{x^2+5} \, dx$,

b) $\int \frac{1}{4+9x^2} \, dx$,

c) $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx$.

**Tipp:** a), b) mit Substitutionsregel, c) mit partieller Integration. Verwenden Sie bei c), dass nach der partiellen Integration auf der rechten Seite wieder das zu berechnende Integral (jedoch mit negativem Vorzeichen) steht.

LÖSUNG:

a)
$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| = \log|x^2+5|$$

Substitution:
$$z := x^2+5 \geq 5 \;\Rightarrow\; dz = 2x\,dx$$

b)
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\frac{9x^2}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{2}{3}dz}{1+z^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dz}{1+z^2} = \\ &= \frac{1}{6}\arctan z = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3x}{2}\right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution: $z := \frac{3x}{2} \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{9x^2}{4}$ und $dz = \frac{3}{2}\,dx \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{2}{3}dz$.

c)
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \int_0^\pi \sin x \sin x\,dx \\ &= -\cos x \sin x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \\ &= \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \quad (-\cos x\sin x|_0^\pi = 0,\text{ da } \sin 0 = \sin\pi = 0) \\ &= \int_0^\pi 1\,dx - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx \\ &= \pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,dx. \\ \Rightarrow \int_0^\pi \sin^2 x\,dx &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** Berechnen Sie mit der Methode zum Integrieren rationaler Funktionen, die in der Vorlesung beschrieben wurde, die Integrale

$$\text{a)} \int \frac{2x-1}{x^2+x-6}\,dx\,, \quad \text{b)} \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx\,.$$

LÖSUNG:

a) Der Nenner des Integranden lässt sich schreiben als
$$x^2+x-6 = (x+3)(x-2).$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung sieht also wie folgt aus

$$\frac{2x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \left( \frac{2x-1}{x+3} - \frac{(x-2)B}{x+3} \right) \Bigg|_{x=2} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+3} = \frac{3}{5}, \\ B &= \left( \frac{2x-1}{x-2} - \frac{(x+3)A}{x-2} \right) \Bigg|_{x=-3} = \frac{2 \cdot (-3) - 1}{-3-2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x+3} = \frac{3(x+3)+7(x-2)}{5(x-2)(x+3)} = \frac{10x-5}{5(x^2+x-6)} = \frac{2x-1}{x^2+x-6}. \quad \checkmark$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2+x-6}\,dx &= \int \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x+3}\,dx \\ &= \frac{3}{5} \log|x-2| + \frac{7}{5} \log|x+3|. \end{aligned}$$

b) Der Nenner lässt sich schreiben als

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1.$$

Da die Ableitung des Nenners wie folgt aussieht

$$(x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2,$$

lässt sich das Integral am günstigsten wie folgt umschreiben:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{2x-2}{(x-1)^2+1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx.$$

Da sich

$$\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| = \log((x-1)^2+1)$$

mit der Substitution $z = 1 + (x-1)^2,\ dz = 2(x-1)\,dx$ ergibt, und

$$\int \frac{dx}{1+(x-1)^2} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z = \arctan(x-1)$$

mit Hilfe der Substitution $z = x-1,\ dz = dx$ folgt, ergibt sich als Gesamtlösung

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \log((x-1)^2+1) + \arctan(x-1).$$

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert. Vergleichen sie dazu $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2}$ mit einem geeigneten Integral.

LÖSUNG: Zuerst betrachten wir die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ und zeigen, dass sie streng monoton fallend ist.

Sei $n \in [1, \infty)$ beliebig und $\epsilon > 0$, dann gilt

$$f(n) = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+\epsilon)^2} = f(n+\epsilon),$$

denn

$$n^2 < n^2 + 2n\epsilon + \epsilon^2 = (n+\epsilon)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+\epsilon)^2},$$

d.h. die Funktion $f$ ist auf ihrem Definitionsgebiet streng monoton fallend.
Daraus folgt für $n \geq 1$

$$\int_n^{n+1} f(x)\, dx > f(n+1)(n+1-n) = f(n+1).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int_1^N f(x)\, dx &= \sum_{m=1}^{N-1} \int_m^{m+1} f(x)\, dx \\ &> \sum_{m=1}^{N-1} f(m+1) \\ &= \sum_{n=2}^{N} f(n) \end{aligned}$$

Da

$$\int_1^N f(x)\, dx = \int_1^N \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^N = 1 - \frac{1}{N} < 1$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + 1 = 2 \text{ unabhängig von } N.$$

Die Reihe ist also beschränkt. Da die einzelnen Summanden alle positiv sind, ist die Reihe auch monoton wachsend, so dass sie für $N \to \infty$ konvergiert.