Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} = y\,,$$

a) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0\ ,\ \dot{y}(0) = 1$,

b) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0$,

indem Sie die Differentialgleichung umschreiben in ein (zugehöriges) Differentialgleichungssystem erster Ordnung, auf welches Sie dann das Picard-Lindelöf'sche Iterationsverfahren (Diagonalisierung) anwenden.

LÖSUNG:
Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung umzuschreiben in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung setzen wir

$$z_0 := y,\ z_1 := \dot{y}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = \dot{y} = z_1 \\ \dot{z}_1 = \ddot{y} = y = z_0 \end{array}$$

Also ist

$$\dot{z} = \dot{\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}z$$

zu lösen! Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung durch

$$z(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} z_0$$

gegeben ist. In unserem Fall gilt $t_0 = 0$ und in (a) $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie in (ii) $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Dadurch ergeben sich die Lösungen

- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wie sieht $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus?
Um diese Frage beantworten zu können, diagonalisieren wir die Matrix $\mathbf{A}$ und starten mit der Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{array}{rrcl} & \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{1}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & -1 \quad \text{oder} \quad 1 \end{array}$$

Anschließend berechnen wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten von $\mathbf{A}$:

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A}+1\mathbb{1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & -x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert -1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A}-1\mathbb{1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert 1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}t}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{t} & -e^{-t}+e^{t} \\ -e^{-t}+e^{t} & e^{-t}+e^{t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ kann man $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^4 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^5 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

Induktiv:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \mathbf{I} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4 = \ldots = \mathbf{A}^{2k} = \mathbf{A}^{2k+2} \\ \mathbf{A}^1 &= \mathbf{A} = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^5 = \ldots = \mathbf{A}^{2k+1} \quad \text{für } k = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \; e^{t\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!}\right)\mathbf{I} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\mathbf{I} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\mathbf{A} \\
&= \cosh t\mathbf{I} + \sinh t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir folgende Lösungen

- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \sinh t$
- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \cosh t$

Aufgabe 2: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

mit Anfangswert $y(0) = 1$.

LÖSUNG: Diese Differentialgleichung lösen wir mit Separation der Variablen

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \int_{y(0)}^{y(t)} \tilde{y}\, d\tilde{y} = -\int_0^t s\, ds \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}y^2(t) - \frac{1}{2}y^2(0) = -\frac{1}{2}t^2 \\
\Leftrightarrow \quad & y^2(t) = 1 - t^2 \\
\Leftrightarrow \quad & y(t) = \pm\sqrt{1 - t^2}
\end{aligned}
$$

Da die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt sein muss, ist nur

$$y(t) = \sqrt{1 - t^2}$$

eine Lösung.

Aufgabe 3: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= 1 + y^2, \\
y(0) &= a,
\end{aligned}
$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

LÖSUNG: Wir lösen das Anfangswertproblem durch Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = 1 + y(t)^2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \int_a^{y(t)} \frac{1}{1+\tilde{y}^2}\, d\tilde{y} = \int_0^t 1\, ds \\
\Leftrightarrow \qquad & \arctan(y(t)) - \arctan(a) = t \\
\Leftrightarrow \qquad & y(t) = \tan(t + \arctan(a))
\end{aligned}$$

Zusatzbemerkung: Für welche t ist diese Lösung nun definiert?
arctan ist als Umkehrfunktion von tan auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und bildet $\mathbb{R}$ auf das offene Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ab, denn tan ist auf diesem Intervall streng monoton wachsend daher umkehrbar.
Wenn nun

$$c_0 = \arctan(a) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

dann ist $y(t) = \tan(t + c_0)$ definiert für

$$-c_0 - \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} - c_0 .$$

Denn für $t \to \frac{\pi}{2} - c_0$ (von unten) bzw. $t \to -\frac{\pi}{2} - c_0$ (von oben) gilt:

$$\tan(t + c_0) \to \pm\infty$$

Aufgabe 4: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \sin(t)y(t) + \sin(t)$$

mit Anfangswert $y(0) = 0$ mit Hilfe von Variation der Konstanten.

LÖSUNG: Zuerst lösen wir die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sin(t)x(t)$$

mit Anfangswert $x(0) = 1$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung dieser Differentialgleichung wie folgt aussieht

$$\begin{aligned}
x(t) &= \exp\left(\int_0^t \sin(s)\, ds\right) \\
&= \exp\left(-\cos(t) + \cos(0)\right) \\
&= e^{1-\cos(t)}
\end{aligned}$$

Des weiteren wissen wir aus der Vorlesung, dass die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Anfangswert $y(0) = 0$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
y(t) &= x(t)\left(\int_0^t \frac{1}{x(s)} \sin(s)\, ds\right) \\
&= e^{1-\cos(t)} \int_0^t e^{\cos(s)-1} \sin(s)\, ds \\
&\overset{z:=\cos(s)-1}{=} e^{1-\cos(t)} \left(-\int_0^{\cos(t)-1} e^z\, dz\right) \\
&= -e^{1-\cos(t)} \left(e^{\cos(t)-1} - e^o\right) \\
&= e^{1-\cos(t)} - 1
\end{aligned}$$