Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2013**
Blatt 1 **09.04.2013**

Aufgabe 1: a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sin^n(x) - \sin(x^n).$$

b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Ist die Funktion f aus Teil b) differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNG:

a) $g'(x) = n \sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x) - \cos(x^n) \cdot (nx^{n-1}) = n\left(\sin^{n-1}(x)\cos(x) - x^{n-1}\cos\left(x^n\right)\right)$

b) f ist stetig: klar für $x \neq 0$, und für $x = 0$,

$$|x \sin(\tfrac{1}{x})| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x \sin(\tfrac{1}{x}) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

c) f ist nicht differenzierbar an $x = 0$:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \sin(\tfrac{1}{h})$$

aber $\lim_{h \to 0} \sin(\frac{1}{h})$ existiert nicht, weil

$$h_n^{(1)} = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0 \Rightarrow \sin(\tfrac{1}{h_n^{(1)}}) = \sin(2n\pi + \tfrac{\pi}{2}) \to 1$$
$$h_n^{(2)} = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \to 0 \Rightarrow \sin(\tfrac{1}{h_n^{(2)}}) = \sin(2n\pi - \frac{\pi}{2}) \to -1$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die Ebene

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform von E, d.h. einen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$, so dass $E = \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d = 0\}$.

b) Prüfen Sie, ob der Punkt $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt.

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die senkrecht zu E ist und durch $\mathbf{p}$ verläuft.

LÖSUNG:

a) Der Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu E und $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$, also

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow -x - 2y + 2z - 1 = 0$$

ist die Normalform von E.

b) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{p} \in E.$

c) $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{n}$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraumes an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

im Punkt $(\tilde{x}, \tilde{y}, f(\tilde{x}, \tilde{y}))$.

LÖSUNG: Definiere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

also

$$(x, y, z) \in T_{(\tilde{x}, \tilde{y}, f(\tilde{x}, \tilde{y}))} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ f(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{\tilde{x}} \sin \tilde{y} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{\tilde{x}} \cos \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen in Richtung $v = (v_1, v_2)$, mit $\|v\| = 1$, im Ursprung.

b) Ist f im Ursprung (total) differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Betrachten Sie die Richtungsableitung in Richtung $(1, 1)$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
\partial_v f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv_1, 0+hv_2) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(hv_1)^2(hv_2)}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} \\
&= \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{\|v\|^2} = v_1^2 v_2
\end{aligned}$$

b) Nein:
Die partiellen Ableitungen nach x und y sind die Richtungsableitungen in Richtung $(1,0)$ bzw. $(0,1)$. Damit ergibt sich für den Gradienten

$$\mathrm{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0,0) \\ \partial_y f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{(1,0)} f(0,0) \\ \partial_{(0,1)} f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann $\partial_w f(0,0) = \frac{1^2 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ und

$$\nabla f(0,0) \cdot w = 0 \neq \partial_w f(0,0).$$

Für (total) differenzierbare Funktionen müsste aber $\partial_w f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot w$ sein.

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ss13/ingmath2/`