**Aufgabe 53:** a) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \frac{x+3x^3}{1+x^2}\,dx$.

**Tipp:** Bringen Sie den Integranden in die Form $p + \frac{f'}{f}$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^\pi x\,\sin x\,dx$.

c) Differenzieren Sie die Funktion $f(t) = \int_0^{2t} \sin(t+s)\,ds$.

LÖSUNG:

a)

$$\int\limits_0^1 \frac{x+3x^3}{1+x^2}dx = \int\limits_0^1 \left(3x - \frac{2x}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \ln(1+x^2)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

b)

$$\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx = x(-\cos x)|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x\,dx = -\pi\cos\pi + \sin x|_0^\pi = \pi$$

c) mit Leibniz-Formel gilt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\sin(3t) - 0 + \int_0^{2t} \cos(t+s)\,ds \\ &= 2\sin(3t) + [\sin(t+s)]_0^{2t} \\ &= 3\sin(3t) - \sin(t) \end{aligned}$$

**Aufgabe 54:** a) Geben Sie die Regel für die Multiplikation $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ in $\mathbb{C}$ an.

b) Geben sie für die folgenden komplexen Zahlen eine Darstellung $re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ an:

(i) $2 - 2i$

(ii) $-5$ .

c) Berechnen Sie $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$.

d) Weisen Sie das Additionstheorem des Kosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

nach. Verwenden Sie hierzu die Darstellung

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi).$$

**Tipp:** Stellen Sie zunächst $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ über Terme vom Typ $e^{i\varphi}$ dar.

e) Bestimmen Sie die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + z + 1 - i = 0.$$

LÖSUNG:

a) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

b) i) $2 - 2i = \sqrt{2^2 + (-2)^2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{8}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{8}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

ii) $-5 = 5\, e^{i\pi}$

c) $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10} = (2\, e^{-\frac{\pi}{4}i})^{10} = 1024\, e^{-i\frac{pi}{2}} = 1024\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$

d) Darstellung von sin und cos durch Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha) \\
&= \frac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)
\end{aligned}$$

und analog

$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$$

Das eingesetzt in die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right)
\end{aligned}$$

und in die Summanden der rechten Seite:

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{4}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i\alpha}e^{i\beta}+e^{i\alpha}e^{-i\beta}+e^{-i\alpha}e^{i\beta}+e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{4}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{i\alpha}e^{i\beta}-e^{i\alpha}e^{-i\beta}-e^{-i\alpha}e^{i\beta}+e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right)\end{aligned}$$

Zusammenfassen ergibt die Behauptung.

e)

$$\begin{aligned} & z^2+z+1-i &&= 0\\ \Leftrightarrow\quad & \left(z+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}+1-i &&= 0\\ \Leftrightarrow\quad & z &&= -\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{i-\tfrac{3}{4}}\\ & &&= -\tfrac{1}{2}\pm\left(\tfrac{1}{2}+i\right)\\ & &&= -1-i \text{ oder } i\end{aligned}$$

**Aufgabe 55:** a) Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 2 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Diagonalisierung $A = QDQ^T$ mit einer Diagonalmatrix $D$ und einer orthogonalen Matrix $Q$. Geben Sie die Eigenwerte von $A$ an.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ habe die beiden noch nicht normierten Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3\\ 4\end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } -1$$

und

$$\begin{pmatrix} -4\\ 3\end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } 3.$$

Geben Sie eine (der beiden) Möglichkeiten an, wie die Matrix $2^A = e^{(\ln 2)A}$ aussehen kann.

LÖSUNG:

a) Berechnung der Eigenwerte von $A$:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\cdot \left[ \left( -\frac{1}{2}-\lambda \right)^2 - \frac{9}{4} \right]$$

Als Eigenwerte von $A$ ergeben sich also $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ und } \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad A &= QDQ^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Beide Eigenvektoren haben Länge $\sqrt{3^2+4^2} = 5$, normierte Eigenvektoren sind also $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Für $A = QDQ^T$ ist $e^A = Qe^DQ^T$.
Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

und also

$$\begin{aligned} 2^A = e^{(\ln 2)A} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 132\frac{1}{2} & -90 \\ -90 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}3 & -3{,}6 \\ -3{,}6 & 3{,}2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Aufgabe 56:**

a) Geben Sie eine Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^n$ mit Normalenvektor $v$ als lineare Abbildung oder Matrix an.

b) Geben Sie eine Drehung in der $x_1 - x_3-$ Ebene des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\alpha$ an.

c) Geben Sie zu beiden Matrizen die Inverse an.

LÖSUNG:

a) lineare Abbildung: $x \mapsto x - 2\frac{x\cdot v}{\|v\|^2}v$
Matrix: $S = \mathbb{1} - \frac{2}{\|v\|^2}vv^T$

b) $D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) $S^{-1} = S$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

**Aufgabe 57:** a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot r(t) &= -\frac{1}{r(t)} \\ r(0) &= 1. \end{aligned}$$

b) Geben Sie für die numerische Lösung der Differentialgleichung $\dot x(t) = \frac{1}{\cos x(t)}$ mit $x(0) = x_0$ ein Verfahren zweiter Ordnung an.

Lösung:

a) Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \tfrac{dr}{dt} &= -\tfrac{1}{r} \\ \Rightarrow \quad \textstyle\int_1^{r(t)} \tilde r \, d\tilde r &= -\textstyle\int_0^t 1\, dt \\ \Leftrightarrow \quad r(t) &= \sqrt{1-2t} \end{aligned}$$

löst die DGL mit gegebenem Anfangswert.

b) Cauchy-Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} y_{i+\frac12} &= y_i + \frac{\tau_i}{2} f(t_i, y_i) = y_i + \frac{\tau_i}{2} \cdot \frac{1}{\cos y_i} \\ y_{i+1} &= y_i + \tau_i f(t_i + \frac{\tau_i}{2}, y_{i+\frac12}) = y_i + \tau_i \frac{1}{\cos(y_i + \frac{\tau_i}{2} \cdot \frac{1}{\cos y_i})} \end{aligned}$$

**Aufgabe 58:** a) Geben Sie die Definition des Begriffs orthogonale Matrix an.

b) Welche geometrische Bedeutung hat die Anwendung der folgenden Matrix?

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Eine quadratische Matrix $O$ heißt orthognoal, wenn $OO^T = \mathbb{1}$ ist.

b) Drehung um 45° um die $y-$Achse (im Uhrzeigersinn).

**Aufgabe 59:** Bestimmen Sie das Volumen des folgenden Körpers

$$K = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid -1 \leq x \leq 1, \quad y^2 + z^2 \leq e^{2x}\ \}.$$

LÖSUNG: Bei dem gegebenen Körper handelt es sich um einen Rotationskörper den man erhält, wenn man die Funktion $f(x) = e^x$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ um die $y-$Achse rotiert.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{Vol}(K) &= \int_{-1}^{1} \pi f^2(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \pi e^{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\pi e^{2x}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\pi \left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \end{aligned}$$

**Aufgabe 60:** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 8x_1(t) + 6x_2(t), & x_1(0) &= 1, \\ x_2'(t) &= -9x_1(t) - 7x_2(t), & x_2(0) &= 2. \end{aligned}$$

a) Das System kann in Matrizenform

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$$

geschrieben werden. Geben Sie die Matrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\mathbf{a}$ an.

b) Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Exponentialfunktion $\exp \mathbf{A}t$.

LÖSUNG:

a) Die Matrix lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$$

und der Vektor lautet $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Zur Berechnung der Exponentialfunktion bestimmen wir die Eigenwerte aus der charakteristischen Gleichung

$$(8-\lambda)(-7-\lambda) + 54 = 0$$

und erhalten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$. Die Eigenvektoren fassen wir in der Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

zusammen. Es gilt

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{SD}$$

Es folgt

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{SD}^n\mathbf{S}^{-1}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\exp \mathbf{A}t &= \mathbf{S}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^{-t} & 2e^{2t} - 2e^{-t} \\ -3e^{2t} + 3e^{-t} & -2e^{2t} + 3e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbf{x}(t) = \exp \mathbf{A}t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7e^{2t} - 6e^{-t} \\ -7e^{2t} + 9e^{-t} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 61:** Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60°N$, $30°O$) mit Anchorage in Alaska ($60°N$, $150°W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten $\varphi$ und $\vartheta$ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

LÖSUNG:

- $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ sowie $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (St. Petersburg) bzw. $\varphi = -\frac{5}{6}\pi$ (Anchorage)
- $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, wobei $t \in [-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}]$

- $m_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ und
  $m_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}\pi \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.
  (Ohne Berücksichtigung der Durchlaufrichtung, da nur nach der Länge gesucht wird)

- $$\text{Länge}(b) = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\, dt = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R\cos\frac{\pi}{3}\, dt = \frac{1}{2}\pi R$$
  $$\text{Länge}(m_1) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\, dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} R\, dt = \frac{1}{6}\pi R$$
  Für das zweite Teilstück $m_2$ ergibt sich analog die selbe Länge.

  Damit hat die Kurve entlang des Breitenkreises die Länge $\frac{1}{2}\pi R \approx 10\,000$ [km], die Kurve über den Nordpol insgesamt $\frac{1}{3}\pi R \approx 6\,700$ [km], also ein Drittel kürzer.

**Aufgabe 62:** Sie befinden sich auf der Bonner Hofgartenwiese an der Position $50°42'57''N, 7°6'16''O$ in einer Höhe von 64 Metern. Wo befindet sich (relativ zu Ihnen) der Punkt mit den kartesischen Koordinaten $Y = \begin{pmatrix} 4\,001\,331 \\ 498\,963 \\ 4\,932\,630 \end{pmatrix}$?
Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius 6371 km, berechnen Sie die Tangentialebene an die Sphäre an Ihrer Position und projizieren Sie den gesuchten Punkt orthogonal auf die Tangentialebene. Wählen Sie die Basis der Tangentialebene so, dass sie die Abstände in Nord- und Ost-Richtung direkt aus den Koeffizienten der Projektion ablesen können.

Lösung: Wir betrachten die folgende Parametrisierung der Sphäre (mit $R = 6\,371\,000$):

$$x(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich die Tangentialvektoren

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} x(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} x(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Mit
$$V = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right\|}, W = \frac{\frac{\partial x}{\partial \vartheta}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right\|}, N = V \times W$$
erhält man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, wobei $V$ und $W$ eine Basis der Tangentialebene und $N$ der Normalenvektor sind.
Mit den gegeben Zahlen erhält man

$$X = x(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} 4001512 \\ 498730 \\ 4932424 \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} -0.123678 \\ 0.992322 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$W = \begin{pmatrix} -0.768255 \\ -0.095751 \\ 0.632941 \end{pmatrix}$$
$$N = \begin{pmatrix} 0.628082 \\ 0.078281 \\ 0.774199 \end{pmatrix}$$

Dann ist $T_X^{aff} S = \{X + \lambda V + \mu W \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ der Tangentialraum.
Der Punkt $Y$ lässt sich eindeutig als $Y = X + \lambda V + \mu W + \nu N$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ schreiben. $X + \lambda V + \mu W$ ist dann die Projektion auf den Tangentialraum, und $\nu$ gibt den Abstand von $Y$ zur Ebene an.
Hier erhalten wir $\lambda = 254.14$, $\mu = 247.11$ und $\nu = 63.99$. Der gesucht Punkt liegt demzufolge von der Hofgartenwiese aus 254 Meter nördlich und 247 Meter östlich auf nahezu der gleichen Höhe.
Es handelt sich also um die Terrasse des Alten Zolls.