Anwesenheitsübungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2013**
Blatt 1 **18.04.2013**

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Integrale:

$$\text{a)} \int\limits_0^1 xe^x\,dx\,, \quad \text{b)} \int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx\,, \quad \text{c)} \int \sqrt{x}\,dx\,.$$

Tipp: a) mit partieller Integration, b) mit Substitutionsregel, c) mit partieller Integration oder unter Verwendung von $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

LÖSUNG:

a)

$$\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

Partielle Integration mit:

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ g(x) = x,\ g'(x) = 1.$$

b)

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}\log|z| = \frac{1}{3}\log|x^3+5|.$$

Substitution: $z := x^3 + 5 \ \Rightarrow\ dz = 3x^2\,dx \ \Leftrightarrow\ x^2\,dx = \frac{1}{3}dz.$

c)

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \quad (x \geq 0!).$$

Oder mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\,dx &= \int 1 \cdot \sqrt{x}\,dx = x \cdot \sqrt{x} - \int x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \\
&= x \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{x}\,dx \\
\Rightarrow\ \frac{3}{2}\int \sqrt{x}\,dx &= x \cdot \sqrt{x} \ \Leftrightarrow\ \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\,.
\end{aligned}$$

Dabei war

$$f(x) = x,\ f'(x) = 1,\ g(x) = \sqrt{x},\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx = 0$ ja ☐ nein ☐

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = 0$ ja ☐ nein ☐

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{1+x^2} \, dx = 0$ ja ☐ nein ☐

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \, dx = 0$ ja ☐ nein ☐

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+x^2} \sin x \, dx = 0$ ja ☐ nein ☐

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die zu integrierenden Funktionen und deren Symmetrieeigenschaften. Es ist nicht sinnvoll, die Integrale jeweils explizit auszurechnen.

LÖSUNG: Benutze: $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$, wenn die Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ ungerade ist, d. h. wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Dies folgt aus der Substitutionsregel.
Durch Anfertigen einer Skizze erkennt man, dass dies bedeutet, dass die Gesamtfläche, welche die Funktion f im Intervall $[-a, a]$ mit der x-Achse einschließt Null ist.

a) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^2 ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.

b) Nein! Da der Integrand gerade und (außer in Null) positiv ist: Gesamtfläche ist positiv.

c) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\frac{1}{1+x^2}$ ist gerade.

d) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\cos x$ ist gerade.

e) Ja! Da der Integrand ungerade ist: $\sqrt{1+x^2}$ ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.