Übungen zur Ingenieur-Mathematik II — **SS 2013**

Blatt 6 — **14.05.2013**

Aufgabe 1: Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über dem Körper $\mathbb{C}$ und versuchen darauf mittels

$$g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) = z_1c_1 + z_2c_2$$

ein Skalarprodukt zu definieren. Welche Eigenschaften (G1)-(G4) eines Skalarproduktes werden nicht erfüllt?

LÖSUNG: Die erste Eigenschaft (G1) wird nicht erfüllt, denn

$$g\left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i \notin \mathbb{R}.$$

Für die zweite Eigenschaft (G2) findet man – wenn man die Variante von (G2) für komplexe Vektorräume betrachtet – ebenfalls ein Gegenbeispiel

$$g\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1+i)(1+2i) = 1 + i + 2i - 2 = -1 + 3i$$

$$\overline{g\left(\begin{pmatrix} 1+2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \overline{(1+2i)(1+i)} = \overline{1+i+2i-2} = \overline{-1+3i} = -1-3i \neq -1+3i$$

Die reelle Variante von (G2) ist natürlich erfüllt.
Die Eigenschaft (G3) macht keine Probleme, denn

$$\begin{aligned}
g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) &= g\left(\begin{pmatrix} z_1+v_1 \\ z_2+v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= (z_1+v_1)c_1 + (z_2+v_2)c_2 \\
&= (z_1c_2 + z_2c_2) + (v_1c_1 + v_2c_2) \\
&= g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Die Eigenschaft (G4) macht ebenfalls keine Probleme, denn für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
g\left(\begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) &= \alpha z_1c_1 + \alpha z_2c_2 \\
&= \alpha(z_1c_1 + z_2c_2) \\
&= \alpha g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine Orthogonalmatrix U, so dass $A = UDU^T$ gilt.

LÖSUNG: **Berechnung des charakteristischen Polynoms:**

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{array}{rrcl} & P(\lambda) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (3-\lambda)^2 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & 3 \pm \sqrt{1} = 2 \text{ oder } 4 \end{array}$$

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ \Rightarrow & x & = & -y \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - 4\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ \Rightarrow & x & = & y \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = U^T = U$$

$$\begin{aligned} U^T A U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Drücken Sie

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

durch 2×2 Determinanten aus.
Tipp:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um das Charakteristische Polynom von A als Produkt zweier quadratischer Polynome zu schreiben.

c) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Tipp: Sie kennen die 2×2 Blöcke bereits aus anderen Übungen bzw. Beispielen.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 \\ 6 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda(3-\lambda) - 4)\,((-2-\lambda)(7-\lambda) - 36) \\
&= \left(\lambda^2 - 3\lambda - 4\right)\left(\lambda^2 - 5\lambda - 50\right)
\end{aligned}$$

c) Die Eigenwerte der Matrix A setzen sich zusammen aus den Eigenwerten der Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ und den Eigenwerten der Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $\lambda_3 = -5$ und $\lambda_4 = 10$. Füllen wir die Eigenvektoren der beiden 2×2 Matrizen passend mit Nullen auf, so erhalten wir die Eigenvektoren der Matrix A, denn

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für λ Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ zugehörigem Eigenvektor.

Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist, ist $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_1.

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_1 zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist, ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_2.

Da $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_2 zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ ist, ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_3.

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A_2 zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$ ist, ist $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_4.

<u>Alternativ lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren auch wie folgt berechnen:</u>

$$\begin{aligned} P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 3\lambda - 4) &= 0 \quad \text{oder} \quad (\lambda^2 - 5\lambda - 50) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda &= \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4}} \quad \text{oder} \quad \lambda = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{225}{4}} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -5, \quad \lambda_4 = 10$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A + 1\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ & 2x_1 + 4x_2 & = & 0 \\ & -x_3 + 6x_4 & = & 0 \\ & 6x_3 + 8x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = -2x_2$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3 = x_4 = 0$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist also der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - 4\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -4x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ & 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ & -6x_3 + 6x_4 & = & 0 \\ & 6x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_2 = 2x_1$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3 = x_4 = 0$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist also der Vektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A + 5\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 5x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ & 2x_1 + 8x_2 & = & 0 \\ & 3x_3 + 6x_4 & = & 0 \\ & 6x_3 + 12x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = x_2 = 0$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_3 = -2x_4$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ ist also der Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$:

$$\begin{aligned}
(A - 10\mathbb{1})x &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad -10x_1 + 2x_2 &= 0 \\
2x_1 - 7x_2 &= 0 \\
-12x_3 + 6x_4 &= 0 \\
6x_3 - 3x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $x_1 = x_2 = 0$ und aus den letzten beiden Zeilen folgt $x_4 = 2x_3$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_4 = 10$ ist also der Vektor

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

> **Tipps:** Die Eigenwerte von A sind ganzzahlig.
> Achten Sie darauf, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen müssen.

LÖSUNG: **Berechnung der Eigenwerte:**

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 - 9\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 13 - 9\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10 - 9\lambda \end{pmatrix} \\
&= 9^{-3}((13 - 9\lambda)^2(10 - 9\lambda) + 16 + 16 - 4(13 - 9\lambda) - 4(13 - 9\lambda) - 16(10 - 9\lambda)) \\
&= 9^{-3}((169 - 234\lambda + 81\lambda^2)(10 - 9\lambda) + 32 - 104 + 72\lambda - 160 + 144\lambda) \\
&= 9^{-3}(1690 - 2340\lambda + 810\lambda^2 - 1521\lambda + 2106\lambda^2 - 729\lambda^3 - 232 + 216\lambda) \\
&= 2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3
\end{aligned}$$

Aus dem Tipp wissen wir, dass die Matrix A ganzzahlige Eigenwerte hat. Folglich raten wir den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und testen

$$P(1) = 2 - 5 + 4 - 1 = 0$$

Polynomdivision ergibt

$$(2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

$$\begin{array}{rrcl} & -\lambda^2 + 3\lambda - 2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ & & = & 1 \text{ oder } 2 \end{array}$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

Bestimmung der Eigenvektoren:
Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{array}{lrcll} & (A - 2\mathbb{1})x & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & (9A - 18\mathbb{1})x & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -\frac{1}{5}I = I' \\ \frac{4}{5}I + II = II' \\ -\frac{2}{5}I + III = III' \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -\frac{5}{9}II' \\ -2II' + III' \end{array} \\ \Rightarrow & x_2 & = & -2x_3 & \\ & x_1 & = & \frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 & \\ & & = & -\frac{8}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 & \\ & & = & -2x_3 & \end{array}$$

Mit $x_3 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{array}{lrcl} & (A - \mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (9A - 9\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alle Zeilen sind äquivalent

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2$ ist also die Ebene durch den Ursprung, die durch diese Gleichung gegeben ist. Man kann sie auch folgendermaßen schreiben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir suchen nun als Eigenvektoren zwei zueinander senkrechte (und normierte) Richtungsvektoren in dieser Ebene.

Wir wählen als ersten z.B. den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (man kann natürlich einen beliebigen Nicht-Null-Vektor in der Ebene wählen, dieser hat aber eine besonders rechenfreundliche Länge) und normieren ihn, so dass wir den Vektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

erhalten. Als zweiten Eigenvektor suchen wir einen Vektor aus demselben Eigenraum, der senkrecht auf v_1 steht, das heißt folgende zwei Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor senkrecht auf v_1 steht und die zweite Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor im selben Eigenraum liegt. Addition beider Gleichungen ergibt

$$3x_1 - 3x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3$$

und wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt erhält man

$$x_1 = -2x_2.$$

Mit $x_2 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren v_1, v_2 und v_3 senkrecht auf einander stehen ($v_1 \cdot v_3 = 0$ und $v_2 \cdot v_3 = 0$) und normiert sind, ist die Matrix

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix.

$$U^T AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$