Aufgabe 1: Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

LÖSUNG:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) <u>Ansatz:</u> $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$\begin{aligned}
p(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 2 \\
p(1) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 2 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad \mathrm{I} \\
p(3) = 5 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 1 \quad \mathrm{II} \\
p(4) = 10 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 4a_2 + 16a_3 = 2 \quad \mathrm{III}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} - \mathrm{I}: \quad & 2a_2 + 8a_3 = -1 \\
\mathrm{III} - \mathrm{I}: \quad & 3a_2 + 15a_3 = 0 \ \Leftrightarrow \ a_2 = -5a_3 \\
& \Rightarrow \ -10a_3 + 8a_3 = -1 \\
& \Leftrightarrow \ 2a_3 = 1 \ \Leftrightarrow \ a_3 = \frac{1}{2} \\
& \Rightarrow \ a_2 = -\frac{5}{2} \\
\Rightarrow \quad & a_1 = 2 - a_2 - a_3 = 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\
\Rightarrow \quad & p(x) = 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
p(0) &= 2 \quad \checkmark \\
p(1) &= 2 + 4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 4 \quad \checkmark \\
p(3) &= 2 + 12 - \frac{45}{2} + \frac{27}{2} = 14 - \frac{18}{2} = 14 - 9 = 5 \quad \checkmark \\
p(4) &= 2 + 16 - 40 + 32 = 50 - 40 = 10 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Lagrangeformel: $p(x) = 2p_0(x) + 4p_1(x) + 5p_2(x) + 10p_3(x)$
mit:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x-1)(x^2-7x+12) \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x^3-8x^2+19x-12) \\
&= -\frac{1}{12}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{19}{12}x + 1 \\
p_1(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)} \\
&= \frac{1}{6}(x^3-7x^2+12x) \\
&= \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x \\
p_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)(x^3-5x^2+4x) \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}x \\
p_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)} \\
&= \frac{1}{12}(x^3-4x^2+3x) \\
&= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \left(-\frac{2}{12} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} + \frac{10}{12}\right)x^3 \\
&\quad + \left(\frac{4}{3} - \frac{14}{3} + \frac{25}{6} - \frac{10}{3}\right)x^2 \\
&\quad + \left(-\frac{19}{6} + 8 - \frac{10}{3} + \frac{5}{2}\right)x \\
&\quad + 2 \cdot 1 \\
&= 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} p(5) &= 2+20-\frac{125}{2}+\frac{125}{2}=22 \\ \tilde{p}(x) &= p(x)+0{,}02\cdot p_2(x) \\ \Rightarrow\ \tilde{p}(5) &= p(5)+0{,}02\cdot p_2(5) \\ &= 22+\frac{2}{100}\cdot\left(-\frac{125}{6}+\frac{125}{6}-\frac{10}{3}\right) \\ &= 22-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3} \\ &= 22-\frac{1}{15} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x) = \sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x) - p(x)|$ in $x = \frac{\pi}{4}$ explizit aus.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f(\pi/2) &= \sin(\pi/2) = 1 \\ f(\pi) &= \sin(\pi) = 0 \\ f(\pi/4) &= \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Gesucht: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ mit $p(0) = 0,\ p(\pi/2) = 1,\ p(\pi) = 0$

Lagrangeformel: $p(x) = 0\,p_0(x) + 1\,p_{\frac{\pi}{2}}(x) + 0\,p_\pi(x)$

$$\begin{aligned} p_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi) = \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} p(0) = 0 &\ \Rightarrow\ a_0 = 0 \\ p(\pi/2) = 1 &\ \Rightarrow\ a_1\frac{\pi}{2} + a_2\frac{\pi^2}{4} = 1 \\ &\ \Rightarrow\ 2a_1\pi + a_2\pi^2 = 4 \quad \mathrm{I} \\ p(\pi) = 0 &\ \Rightarrow\ a_1\pi + a_2\pi^2 = 0 \quad \mathrm{II} \end{aligned}$$

I-II: $a_1\pi = 4 \ \Rightarrow\ a_1 = \frac{4}{\pi}$
Einsetzen in II: $4 + a_2\pi^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ a_2 = -\frac{4}{\pi^2}$.

Explizite Berechnung des Fehlers:

$$|p(\pi/4) - f(\pi/4)| = 0,75 - 0,707106781 \approx 0,042893219$$

Aufgabe 3: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die wir auf dem Definitionsbereich numerisch integrieren wollen. Dazu teilen wir das Intervall $[0,1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{4}$ auf und approximieren f auf jedem Teilintervall durch eine affine Funktion.

a) Berechnen Sie die Integrale der Lagrangepolynome über die Teilintervalle. (Welche Integrale müssen gleich sein?)

b) Bestimmen Sie basierend darauf eine numerische Integrationsformel.

LÖSUNG: Um die Funktion f auf dem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}] = [\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$ durch eine affine Funktion zu approximieren benötigen wir zwei Lagrangepolynome. $L_i(x)$ und $L_{i+1}(x)$, wobei $L_i(x_i) = 1$, $L_i(x_{i+1}) = 0$, $L_{i+1}(x_i) = 0$ und $L_{i+1}(x_{i+1}) = 1$. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{\left(x - \frac{i+1}{4}\right)}{\left(\frac{i}{4} - \frac{i+1}{4}\right)} = -4x + (i+1) \\ L_{i+1}(x) &= \frac{\left(x - \frac{i}{4}\right)}{\left(\frac{i+1}{4} - \frac{i}{4}\right)} = 4x - i \end{aligned}$$

a) Betrachtet man das Intervall $[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$, so handelt es sich bei der Fläche unter den beiden Funktion L_i und L_{i+1} jeweils um ein Dreieck mit denselben Seitenlängen. Somit gilt

$$\int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_i(x)\,dx = \int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_{i+1}(x)\,dx.$$

Des weiteren ist der Wert dieser Integrale für alle vier Teilintervalle gleich, so dass wir die Rechnung vereinfachen können, indem wir das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ betrachten.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} L_0(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} -4x + 1\,dx \\ &= -2x^2 + x \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

b) Um die Funktion f auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ zu integrieren, spalten wir das Integral in Teilintegrale über die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ auf. Des weiteren integrieren wir auf diesen Intervallen nicht die Funktion f, sondern ihre affine

Approximation.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &\approx \sum_{i=0}^{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)L_i(x) + f(x_{i+1})L_{i+1}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x)\,dx + f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i+1}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{3} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\
&= \frac{1}{8} \left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i) + f(x_4) \right]
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie $\int_0^1 (x^3+3x^2-x+1)\,dx$ einmal direkt und einmal numerisch mit Hilfe der Kepler'schen Fassregel

$$K_f := \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) ,$$

wobei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ ist.

LÖSUNG:

i)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - x + 1)\,dx &= \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 3x^2 - x + 1 \\
f(0) &= 1 \\
f(1) &= 1 + 3 - 1 + 1 = 4 \\
f(1/2) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{11}{8} \\
\Rightarrow K_f &= \frac{1}{6}\,(f(0) + 4f(1/2) + f(1)) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + 4 \cdot \frac{11}{8} + 4\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{11}{2} + 4\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{21}{2} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7}{4} = 1{,}75
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$1{,}75 = K_f = \int_0^1 f(x)\,dx,\ \ f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1\,.$$

Dies ist <u>kein</u> Zufall: Es gilt allgemein:
Die Kepler'sche Fassregel integriert Polynome $p \in \mathcal{P}_3$ exakt.