Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{5x}{x^2 - x - 6}\, dx.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 x^3 \ln|x|\, dx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x - 3\pi)\, dx.$$

LÖSUNG:

a) $x^2 - x - 6 = 0 \iff (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$

$\iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\iff x = -2$ oder $x = 3$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

$$\frac{5x}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$\iff 5x = A(x-3) + B(x+2)$

$\iff 5x = (A+B)x - 3A + 2B$

$\iff 3A = 2B$ und $A + B = 5$

$\iff A = \frac{2}{3}B$ und $(\frac{2}{3}+1)B = 5$

$\iff A = \frac{2}{3}B$ und $B = 3$

$\iff A = 2$ und $B = 3$

$$\Rightarrow \int \frac{5x}{(x+2)(x-3)}\, dx = \int \frac{2}{x+2}\, dx + \int \frac{3}{x-3}\, dx$$

$$= 2\ln(x+2) + 3\ln(x-3)$$

b) $$\int_1^2 x^3 \ln|x|\,dx = -\int_1^2 \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4}x^4 \ln|x|\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{4}\int_1^2 x^3\,dx + 4\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 1$$

$$= -\frac{1}{16}x^4\Big|_1^2 + 4\ln 2$$

$$= -1 + \frac{1}{16} + 4\ln 2$$

$$= -\frac{15}{16} + 4\ln 2$$

c) $$\int_0^{\pi/2} \sin(4x-3\pi)\,dx = \int_{-3\pi}^{-\pi} \sin y \;\frac{1}{4}\,dy$$

$$y = 4x - 3\pi$$
$$\frac{dy}{dx} = 4$$

$$= -\frac{1}{4}\cos y\Big|_{-3\pi}^{-\pi}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= 0$$

7) a) $f(x) = \sin(x)^2$

$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$

Taylor: $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2$
$+ \mathcal{O}(|x-x_0|^3)$

$= f(x_0) + 2\sin(x_0)\cos(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(2\cos^2(x_0) - 2\sin^2(x_0)\right) \cdot$
$\cdot (x-x_0)^2 + \mathcal{O}(|x-x_0|^3)$

b) Es gilt $f(x,y) = f(0,0) + Df(0,0)^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x \ \ y)\, D^2f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right)$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x)\cos(x)\cos(y^2) \\ -\sin(x)^2 \sin(y^2)\, 2y \end{pmatrix}$$

$\underline{Df(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Entwicklung um $x_0 \in \mathbb{R}^2$

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos^2(x)\cos(y^2) - 2\sin^2(x)\cos(y^2) & -4y\sin(x)\cos(x)\sin(y^2) \\ -4y\cos(x)\sin(x)\sin(y^2) & -4y^2\sin(x)^2\cos(y^2) - 2\sin(x)^2\sin(y^2) \end{pmatrix}$$

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{Df(0,0)^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{0} + \frac{1}{2}(x \ \ y)\, D^2f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right)$

$= \frac{1}{2}(x \ \ y)\begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right) = x^2 + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right)$

Aufgabe 9: Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sowie die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.

b) Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion $f(x)$ zu diesen Knoten.

c) Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von -1 bis 1 mit den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ an.

d) Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

an.

e) Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion f?

f) Geben Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

an. (ohne Rechnung)

LÖSUNG:

a)
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)}$$

$$= \frac{x}{-1} \cdot \frac{x-1}{-1-1} = \frac{1}{2} x (x - 1)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{x+1}{1} \cdot \frac{x - 1}{-1} = -(x+1)(x-1)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{x+1}{1+1} \cdot \frac{x-0}{1-0} = \frac{1}{2} x (x+1)$$

b) $p(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x)$

$= L_1(x)$

$= -(x+1)(x-1)$

$= -x^2 + 1$

c) $\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{1}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$\omega_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right)$

$= \frac{2}{3}$

$\omega_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 + x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{1}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]$

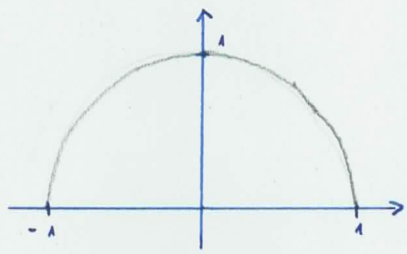
$= \frac{1}{6}$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}f(x_0) + \frac{2}{3}f(x_1) + \frac{1}{6}f(x_2)\right)$

d) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 0\right)$

$= \frac{4}{3}$

e) Halbkreis



f)

$\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi$