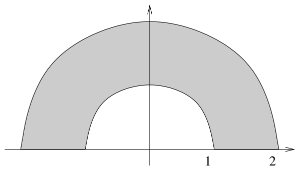
Anwesenheitsübungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2013**
Blatt 11 **04.07.2013**

Aufgabe 1: Berechnen Sie den Schwerpunkt des halben Ringes mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 sowie konstanter Dichte 1:



LÖSUNG: Polarkoordinaten: $1 \leq r \leq 2$ und $0 \leq \phi \leq \pi$
Berechnung der Masse:

$$M = \int_1^2 \int_0^\pi 1\, r\, d\phi\, dr = \pi \int_1^2 r\, dr = \frac{3}{2}\pi$$

Berechnung der y-Koordinate des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \sin\phi\, r\, d\phi\, dr \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \sin\phi\, d\phi \\ &= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (-\cos\pi - (-\cos 0)) \\ &= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 2 = \frac{28}{9\pi} \approx 0{,}99 \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist die x-Koordinate des Schwerpunktes x_S offensichtlich 0, siehe auch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_1^2 \int_0^\pi r \cos\phi\, r\, d\phi\, dr \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_1^2 r^2\, dr \int_0^\pi \cos\phi\, d\phi \\ &= \frac{2}{3\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot (\sin\pi - \sin 0) \\ &= \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R.

LÖSUNG: Die Berechnung erfolgt unter Verwendung von Kugelkoordinaten:

$$g(r,\vartheta,\phi) = \begin{pmatrix} x(r,\vartheta,\phi) \\ y(r,\vartheta,\phi) \\ z(r,\vartheta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r\sin\vartheta)\cos\phi \\ (r\sin\vartheta)\sin\phi \\ (r\cos\vartheta) \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &\vartheta \in [0,\pi]\,, \phi \in [0, 2\pi] \\ &\det Dg(r,\vartheta,\phi) = r^2 \sin\vartheta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} 1\,dx &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1\, r^2 \sin\vartheta \, d\phi \, d\vartheta \, dr \\
&= \int_0^R r^2\,dr \int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\pi} 1\,d\phi \\
&= \frac{1}{3}(R^3 - 0)\,(-\cos(\pi) + \cos(0))\,2\pi = \frac{4}{3}R^3\pi
\end{aligned}
$$