Aufgabe 1: Bestimmen Sie zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ eine Diagonalmatrix ist.
Tipp: Wenn die Spalten von $\mathbf{P}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind, so gilt wie bei symmetrischen Matrizen $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix aus den entsprechenden Eigenwerten von $\mathbf{A}$ ist. Man muss also geeignet viele linear unabhängige Eigenvektoren finden, so dass $\mathbf{P}$ invertierbar ist.
Probieren Sie die Teiler des konstanten Gliedes um die erste Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu bestimmen.

Lösung: (I) **Bestimmung der Eigenwerte:**

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 - 18(-5-\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) \\ &= (-5 + 4\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 36 - 9\lambda \\ &= -20 + 16\lambda + 4\lambda^2 + 5\lambda - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 36 - 9\lambda \\ &= 16 + 12\lambda - \lambda^3 \end{aligned}$$

Als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms raten wir $\lambda = 4$ und testen

$$P(4) \quad = \quad -64 + 48 + 16 = 0.$$

Mit Hilfe der Polynomdivision oder des Horner-Schemas erhält man daraus

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = (\lambda - 4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = (\lambda - 4)(-1)(\lambda + 2)^2.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4.$$

(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
Für $\lambda_1 = -2$ erhält man:

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = x_1 + x_3.$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -2 = \lambda_2$.
Man sieht leicht ein (oder rechnet dies schnell nach), dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind.
Entsprechend gilt für $\lambda_3 = 4$:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \; x_1 = x_2 \text{ und } x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \\ \Leftrightarrow & \; x_1 = x_2 \text{ und } x_3 = 2x_2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 4$.
Wir behaupten, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir

$$\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \nu \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\begin{aligned} \lambda + \nu &= 0 \\ \lambda + \mu + \nu &= 0 \\ \mu + 2\nu &= 0. \end{aligned}$$

Aus erster und zweiter Zeile folgt $\mu = 0$, mit der dritten Zeile folgt $\nu = 0$ und damit aus der ersten Zeile $\lambda = 0$. Dies war zu zeigen.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist also invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind.

Damit ist $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, wir berechnen also noch $\mathbf{P}^{-1}$:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

und erhalten:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich rechnen wir nach:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Fläche mit der Darstellung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ein Ellipsoid ist und bestimmen Sie dessen Hauptachsen.

LÖSUNG: Die Gleichung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ist äquivalent zu der Gleichung

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1,$$

wobei $\mathbf{A}$ folgende symmetrische 3×3-Matrix sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x}$ den Vektor $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet. Es gilt nämlich

$$\mathbf{Ax} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6x + 2y - 2z \\ 2x + 7y \\ -2x + 5z \end{pmatrix}$$

und

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{3}[6x^2 + 2xy - 2xz + 2xy + 7y^2 - 2xz + 5z^2] = 2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz,$$

woraus obige Behauptung folgt. Um die Hauptachsen dieser Fläche zu bestimmen führen wir eine Hauptachsentransformation durch. Dazu bestimmen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} 0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (2-\lambda)(\frac{7}{3} - \lambda)(\frac{5}{3} - \lambda) - \frac{4}{9}(\frac{7}{3} - \lambda) - (\frac{5}{3} - \lambda)\frac{4}{9} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{35}{9}) - \frac{28}{27} + \frac{4}{9}\lambda - \frac{20}{27} + \frac{4}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \frac{35}{9}\lambda + 2\lambda^2 - 8\lambda + \frac{70}{9} - \frac{48}{27} + \frac{8}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + (-\frac{35}{9} + \frac{8}{9} - 8)\lambda + \frac{54}{9} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

Durch Probieren erhält man, dass $\lambda = 1$ eine Lösung der Gleichung $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, da $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Horner-Schemas erhält man dann

$$0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

D. h. die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren: Für $\lambda_1 = 1$ erhält man:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 3x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & +4y & & = 0 \\ -2x & & +2z & = 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = -2y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = z \quad \Leftrightarrow \quad z = x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
Für $\lambda_2 = 2$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & +y & & = 0 \\ -2x & & -z & = 0 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow y = z \quad \Leftrightarrow \quad z = y$$

und aus der zweiten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow y = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die dritte Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.
Für $\lambda_3 = 3$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} -3x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & -2y & & = 0 \\ -2x & & -4z & = 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = y \quad \Leftrightarrow \quad y = x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = -2z \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{2}x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$.
Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \frac{1}{9}(-2 - 2 + 4) = 0, \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0, \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(-2 + 4 - 2) = 0. \end{aligned}$$

D. h. die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ und die Matrix

$$\mathbf{V} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix, d. h. es gilt $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ mit

$$\mathbf{V}^T := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$$

wie man leicht nachrechnet. Es folgt

$$\mathbf{AV} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T\mathbf{AV} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{VDV}^T \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\mathbf{y} := \mathbf{V}^T\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ -x + 2y + 2z \\ 2x + 2y - z \end{pmatrix},$$

so folgt

$$\langle \mathbf{Dy}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{DV}^T\mathbf{x}, \mathbf{V}^T\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{VDV}^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1.$$

Da die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ alle positiv sind, ist die durch

$$\langle \mathbf{Dy}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1$$

definierte Fläche ein Ellipsoid mit den Hauptachsen $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \qquad & x_1 = 1, \\ x_{n+1} \quad = \quad & x_n + x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, die sogenannten Fibonacci-Folge.

Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = A y_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt berechnen zu können, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.
Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass es für 2×2 Matrizen eine Formel zum Berechnen der inversen Matrix gibt.
Zur Kontrolle:

$$A = BDB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} & \det(A - \lambda \mathbb{1}) &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \; & \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \; & \lambda^2 - \lambda - 1 &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \; & \lambda_{1/2} &=& \; \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 1} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_i \mathbb{1})\begin{pmatrix}\lambda_i\\ 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1-\lambda_i & 1\\ 1 & -\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\lambda_i^2+\lambda_i+1\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aus den vorherigen Aufgabenteil wissen wir $\lambda_i^2-\lambda_i-1=0$, so dass auch die erste Komponente des Vektors gleich Null und die Behauptung bewiesen ist.

c) Für die inverse Matrix einer 2×2 Matrix $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ gilt

$$
B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}
$$

$$
A=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}
$$

mit $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ und $B^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}$

d)

$$
A^2=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}=B\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}B^{-1}
$$

$$
\Rightarrow A^n=B\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}B^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\lambda_1^n & -\lambda_1^n\lambda_2\\ -\lambda_2^n & \lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\; y_{n+1}=A^n y_1 &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\; x_n=\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2^n}\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}
$$

Probe: $\quad x_1=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1,\quad x_2=\dfrac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{2^2\sqrt{5}}=1.$

Aufgabe 4: Gegeben ist das Skalarprodukt

$$g(v, w) = \int_0^{2\pi} v(x)w(x)\, dx$$

auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

a) Man zeige, dass die Funktionen 1, $\cos(x)$ und $\cos(2x)$ richtig skaliert ein ON-System bilden. Was ist die Skalierung?
Tipp: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right)$. Stellen Sie die Funktion in Termen der obigen Basis dar und berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalität $\|f\|_g^2 = g(f, f)$.

Lösung:

a) Da die Skalierung nichts daran ändert, ob die Funktionen orthogonal ist, oder nicht, prüfen wir erst die Orthogonalität nach.

$$\begin{aligned} g(1, \cos(x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\, dx \\ &= \sin(x)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1, \cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(2x)\, dx \\ &\overset{z:=2x}{=} \int_0^{4\pi} \cos(z)\frac{1}{2}\, dz \\ &= \frac{1}{2}\sin(z)\Big|_0^{4\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\cos(x), \cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos^2(x)\, dx - \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x)\, dx \\ &= \sin(x)\cos^2(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x)2\cos(x)\left(-\sin(x)\right)\, dx - \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x)\, dx \\ &= \frac{1}{3}\sin^3(x)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
\int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \sin^3(x) - \int \sin(x) 2\sin(x)\cos(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \sin^3(x) - 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{3}\sin^3(x)
\end{aligned}$$

(Alternativ Substitution $z = \sin x$.)

Da wir nun wissen, dass alle drei Funktionen orthogonal zueinander sind, berechnen wir die Skalierung, um sie zur normieren.

$$\begin{aligned}
g(1,1) &= \int_0^{2\pi} 1\,dx \\
&= x\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}) = 1$$

$$\begin{aligned}
& \int \cos^2(x)\,dx && = && \cos(x)\sin(x) - \int -\sin(x)\sin(x)\,dx \\
\Leftrightarrow\ & \int \cos^2(x)\,dx && = && \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx \\
\Leftrightarrow\ & \int \cos^2(x)\,dx && \overset{\sin^2(x)+\cos^2(x)=1}{=} && \cos(x)\sin(x) + \int 1 - \cos^2(x)\,dx \\
\Leftrightarrow\ & 2\int \cos^2(x)\,dx && = && \cos(x)\sin(x) + x \\
\Leftrightarrow\ & \int \cos^2(x)\,dx && = && \tfrac{1}{2}\left(x + \cos(x)\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad g(\cos(x), \cos(x)) &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi + \cos(2\pi)\sin(2\pi)\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(\tfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}) = 1$$

$$\begin{aligned}
g(\cos(2x), \cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos^2(2x)\,dx \\
&\overset{z:=2x}{=} \int_0^{4\pi} \cos^2(z)\frac{1}{2}\,dz \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \cos(x)\sin(x)\right)\Big|_0^{4\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g(\tfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}) = 1$$

Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}$ bilden also ein ON-System.

b) Mit $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_1(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ und $\varphi_2(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}$ sowie $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, $a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + a_2\,\varphi_2(x) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right) \end{aligned}$$

und damit

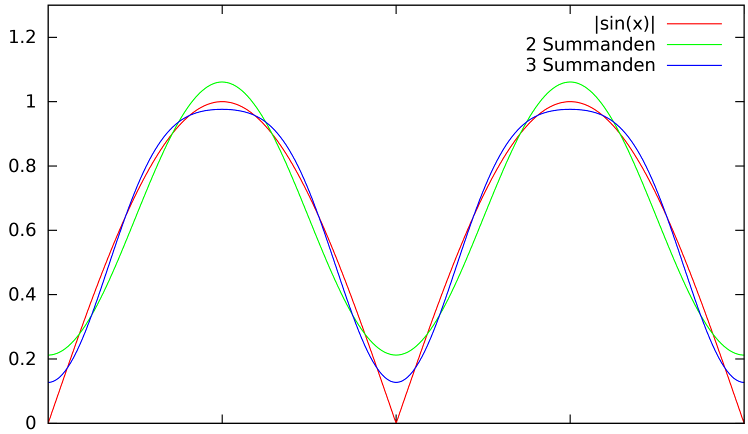
$$\begin{aligned} \|f\|_g^2 = g(f,f) &= g\left(\sum_{i=0}^{2} a_i\,\varphi_i(x), \sum_{j=0}^{2} a_j\,\varphi_j(x)\right) \\ \text{(bilinear)} \qquad &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_i\,a_j\,\underbrace{g(\varphi_i(x),\varphi_j(x))}_{=1 \text{ für } i=j,\ 0 \text{ sonst}} \\ \text{(ON Eigenschaft)} \qquad &= \sum_{i=0}^{2} a_i^2 \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{9\pi} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Das Ergebnis zur Berechnung der induzierten Norm $\|f\|_g$ ist in sofern interessant, als dass die über ein Integral definierte Norm einer kontinuierlichen Funktion mit der euklidischen Norm des diskreten Koeffizientenvektors $a = (a_0, a_1, a_2)$ übereinstimmt, kurz: $\|f\|_g = \|a\|$.
- Die Komposition von Sinus- und Kosinusfunktionen mit Vielfachen einer Grundfrequenz wird i. A. auch *Fourier-Reihe* genannt. Geeignete Funktionen können durch eine solche Reihe trigonometrischer Polynome beliebig gut approximiert werden. Im vorliegenden Fall handelt es sich um die ersten beiden Summanden der Reihe

  $$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k)^2 - 1},$$

  die die Funktion $|\sin(x)|$ approximiert.



|sin(x)|
2 Summanden
3 Summanden
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0