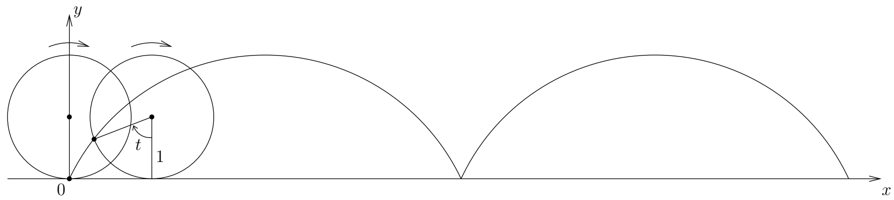
Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2013**
Blatt 13 **09.07.2013**

Aufgabe 1: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem ein Kreis von Radius 1 gleichmäßig die x-Achse entlang rollt.



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0,0)$ beschreibt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die bei einer Umdrehung des Kreises entsteht.
Tipp: $\cos(t) = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10},\ t \in [0, T]$$

a) Skizzieren Sie die Kurve.
Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.

b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.

d) Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \to \infty$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie für $a > 0$ folgende Kurve:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(\cos(t))^3 \\ a(\sin(t))^3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Länge von γ über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Berechnen Sie für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \qquad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

c) Skizzieren Sie $\gamma(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $a = 1$.
Tipp: Benutzen Sie hierfür die obigen Grenzwerte, Werte an $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$ sowie Symmetrieüberlegungen.

Aufgabe 4: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2} \right] \to \mathbb{R}^2,\ \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{0{,}13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R} \right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].