Aufgabe 1: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

LÖSUNG:

$$f(y) = f(1) + f'(1)(y-1) + \frac{1}{2}f''(1)(y-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Mit $f(x) = \sin(\pi x)$ ergibt sich

$$f(y) = -\pi(y-1) + \frac{\pi^3}{6}(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Aufgabe 2:

- Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

  um die Stelle 0 bis zur Ordnung 4, das heißt mit Restglied fünfter Ordnung.

- Welche Regelmäßigkeit lässt sich erkennen? Stellen Sie eine Vermutung für die weiteren Terme der Entwicklung auf.

- Stellen Sie die zu approximierende Funktion f sowie alle errechneten (und vermuteten) Taylor-Polynome aufsteigender Ordnung graphisch mit Hilfe eines geeigneten Programms dar.

LÖSUNG:

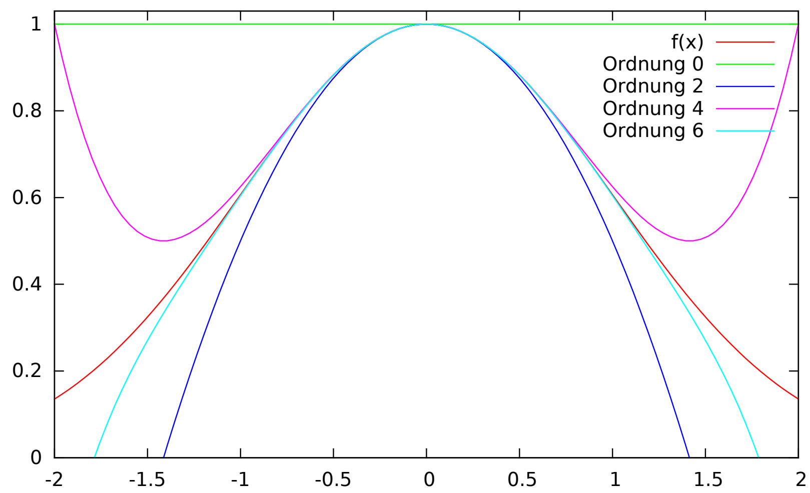
-

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
f''(x) &= -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
f^{(3)}(x) &= x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 2x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^3\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
f^{(4)}(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
&\quad - 2x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - 3x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^4\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= 1 + 0x + \frac{1}{2}(-1+0)\,x^2 + \frac{1}{6}(0+0-0)\,x^3 + \frac{1}{24}(1-0+2-0-0+0)\,x^4 + O(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + O(x^5)
\end{aligned}$$

- Es handelt sich um die Exponentialreihe mit Argument $-\frac{x^2}{2}$, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots$$

- 

Aufgabe 3: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tan B),$$

wobei

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.
Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.
Anleitung: Wir definieren $w := \tan\beta$ und $w_0 := \tan B$. Damit läßt sich die Differenz schreiben als

$$\begin{aligned} \beta - B &= \arctan\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\tan B\right) - B \\ &= \arctan w - \arctan w_0. \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\arctan(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w-w_0|^2)$.
- Um $w - w_0$ darzustellen entwickeln Sie $f(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.

LÖSUNG:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickeln wir die Funktion $\arctan w$ um w_0 so erhalten wir also

$$\arctan w = \arctan w_0 + \frac{1}{1+w_0^2}(w-w_0) + O\left(|w-w_0|^2\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \beta - B &= \arctan w - \arctan w_0 \\ &= \frac{w - w_0}{1 + w_0^2} + O(|w - w_0|^2) \end{aligned}$$

Da sich die Differenz $w - w_0$ schreiben läßt als

$$\begin{aligned} w - w_0 &= \tan\beta - \tan B \\ &= \sqrt{1-\epsilon^2}\tan B - \tan B \end{aligned} \tag{1}$$

entwickeln wir $\sqrt{1-\epsilon^2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{1-x^2} \\ f(\epsilon) &= f(0) + f'(0)\epsilon + \frac{f''(0)}{2}\epsilon^2 + \frac{f'''(0)}{6}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ f'''(x) &= -\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-\epsilon^2} = 1 - \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^4)$$

Eingesetzt in (1) ergibt das

$$\begin{aligned} w - w_0 &= \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^4)\right)\tan B - \tan B \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Daran sieht man auch $w - w_0 = O(\epsilon^2)$.
Die Entwicklung der Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ε mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$ sieht also wie folgt aus

$$\begin{aligned} \beta - B &= \frac{-\frac{\epsilon^2}{2}\tan B + O(\epsilon^4)}{1 + \tan^2 B} + \underbrace{O\left(|w - w_0|^2\right)}_{=O(\epsilon^4)} \\ &= \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right)\frac{\tan B}{1 + \tan^2 B} + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ numerisch an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten für $h = 10^{-1}$, $h = 10^{-2}$, $h = 10^{-3}$. Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse mit dem exakten Wert $f'(3) = 3^3(\ln 3 + 1)$. Tragen Sie die Fehler für die verschiedenen Werte von h in eine Tabelle ein.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^x = e^{x\ln x}\\
x_0 &= 3\\
\\
f(3) &= 3^3 = 3\cdot 3\cdot 3 = 27\\
f'(x) &= \left(e^{x\ln x}\right)'\\
&= e^{x\ln x}\cdot\left\{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right\}\\
&= x^x\cdot(\ln x+1)\\
f'(3) &= 3^3\cdot(\ln 3+1)\\
&= 27\cdot(1+\ln 3)\\
&= 27+27\cdot\ln 3\\
&\approx 27(1+1{,}098612289)\\
&\approx 56{,}66253179 \quad \text{(Taschenrechner)}
\end{aligned}$$

Zentraler Differenzenquotient:

$$ZD_f(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$h = 10^{-1} = \frac{1}{10},\ h = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100},\ h = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{10}:\ ZD_f(3,\frac{1}{10}) &= \frac{f(3{,}1)-f(2{,}9)}{1/5}\\
&= 5\cdot\left((3{,}1)^{3{,}1}-(2{,}9)^{2{,}9}\right)\\
&\approx 5\cdot(33{,}35963198-21{,}92573667)\\
&\approx 5\cdot 11{,}43389531\\
&\approx 57{,}16947654\\
|\mathit{Fehler}| &\approx 57{,}16947654-56{,}66253179 \approx 0{,}50694475
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{1}{100}:\ ZD_f(3,\frac{1}{100}) &= 50\cdot\left((3{,}01)^{3{,}01}-(2{,}99)^{2{,}99}\right)\\
&\approx 50\cdot(27{,}5730718-26{,}43972009)\\
&\approx 50\cdot 1{,}13335171\\
&\approx 56{,}66758548\\
|\mathit{Fehler}| &\approx 56{,}66758548-56{,}66253179 \approx 0{,}005053685
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h=\frac{1}{1000}:\ ZD_f(3,\frac{1}{1000}) &= 500\cdot\big((3{,}001)^{3{,}001}-(2{,}999)^{2{,}999}\big)\\
&\approx 500\cdot(27{,}05672654-26{,}94340137)\\
&\approx 500\cdot 0{,}113325166\\
&\approx 56{,}66258295\\
|\mathit{Fehler}| &\approx 56{,}66258295-56{,}66253179\approx 0{,}00005116
\end{aligned}
$$

Vorwärtsdifferenzenquotient:

$$
VD_f(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}
$$

$$
\begin{aligned}
h=\frac{1}{10}:\ VD_f(3,\frac{1}{10}) &\approx 63{,}59631979\\
|\mathit{Fehler}| &\approx 6{,}933787997
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h=\frac{1}{100}:\ VD_f(3,\frac{1}{100}) &\approx 57{,}30718008\\
|\mathit{Fehler}| &\approx 0{,}64464829
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h=\frac{1}{1000}:\ VD_f(3,\frac{1}{1000}) &\approx 56{,}7265386\\
|\mathit{Fehler}| &\approx 0{,}06400681
\end{aligned}
$$

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
$ZD_f(3,h)$	0,507	0,00505	0,0000512
$VD_f(3,h)$	6,93	0,645	0,0640

Man sieht gut die unterschiedliche Approximationsordnung: Beim Vorwärts-Differenzenquotienten wird der Fehler um den Faktor 10 kleiner, wenn man h durch 10 teilt (Ordnung $O(h)$). Beim zentralen Differenzenquotienten wird der Fehler bei der Zehntelung von h um den Faktor 100 kleiner (Ordnung $O(h^2)$).