Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

und die Spiegelungsmatrix

$$S = \mathbb{1} - 2nn^T \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{R}^3,\ \|n\| = 1$$

orthogonal sind.
Sind sie auch symmetrisch?

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} D^T D &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$D \neq D^T$ für $\alpha \neq k\pi$
Die Drehmatrix D ist also orthogonal aber in der Regel nicht symmetrisch.

Die Spiegelungsmatrix S ist symmetrisch, denn

$$\begin{aligned} S^T &= \left(\mathbb{1} - 2nn^T\right)^T \\ &= \mathbb{1}^T - 2\left(nn^T\right)^T \\ &= \mathbb{1} - 2{n^T}^T n^T \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T \\ &= S. \end{aligned}$$

Des weiteren ist sie auch orthognal, denn

$$\begin{aligned} S^T S = SS &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T - 2nn^T + 4n \underbrace{n^T n}_{=n\cdot n=1} n^T \\ &= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T \\ &= \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja ☐ nein ☐

b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

e) Jede 2×2 Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

b) **Nein!** Gegenbeispiel: $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist n-facher Eigenwert:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{I}) = \det((1-\lambda)\mathbf{I}) = (1-\lambda)^n \det \mathbf{I} = (1-\lambda)^n \;.$$

c) **Nein!** Siehe b)! Die $n \times n$ Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist symmetrisch!

d) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

e) **Ja!** Eine 2×2 Spiegelungsmatrix ist symmetrisch. Siehe auch Skript bzw. Vorlesung.