Anwesenheitsübungen zur Ingenieur-Mathematik II — **SS 2013**
Blatt 7 — **06.06.2013**

Aufgabe 1: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix.

a) Wenn A orthogonal ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

b) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A.
ja ☐ nein ☐

c) Wenn A orthogonal ist, sind die Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A^TA.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich 1.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Eigenwerten von A.
ja ☐ nein ☐

f) Wenn A symmetrisch ist, sind alle Singulärwerte von A gleich den Beträgen derjenigen Eigenwerte von A, die ungleich Null sind.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! A orthogonal $\Rightarrow AA^T = \mathbb{1} \Rightarrow$ die Eigenwerte von AA^T sind gleich 1 $\Rightarrow$ die Singulärwerte von A sind gleich $\sqrt{1} = 1$

b) Nein! Die Matrix $A = -\mathbb{1}$ ist orthogonal und ihre Eigenwerte sind -1. Da in diesem Fall $A^TA = \mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A jedoch gleich 1.

c) Ja! Die Singulärwerte von A ergeben sich aus den Wurzeln der Eigenwerte von $A^TA = \mathbb{1}$ und $\sqrt{1} = 1$.

d) Nein! Betrachten Sie die Matrix $A = 2\mathbb{1}$. Da in diesem Fall $A^TA = 4\mathbb{1}$ gilt, sind die Singulärwerte von A gleich 2.

e) Nein! A symmetrisch $\Rightarrow A = A^T$

$$\Rightarrow AA^T = A^2 = UD^2U^T = U \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} U^T$$

$\Rightarrow$ Für die Singulärwerte σ_i von A gilt $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$ (siehe auch b))

f) Ja! Begründung siehe oben.

Aufgabe 2: Angenommen, wir werfen einen Ball senkrecht nach oben und vernachlässigen im Folgenden die Reibung. Wir lassen den Ball in einer Höhe von 1 m mit einer Geschwindigkeit von $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ los und er erfahre die ganze Zeit über die (Erd-) Beschleunigung von $-10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

a) Berechnen Sie die Funktion $h(t)$, die die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Lösen Sie dazu die Differentialgleichung

$$\ddot{h}(t) = -10$$

erst ohne und anschließend mit Anfangswerten.

b) Zu welcher Zeit $T > 0$ schlägt der Ball auf dem Boden auf, d. h. für welches $T > 0$ gilt $h(T) = 0$?

c) Mit welcher Geschwindigkeit $\dot{h}(T)$ trifft der Ball auf der Erde auf?

LÖSUNG:

a) $\ddot{h}(t) = -10$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \dot{h}(t) &= \int_0^t \ddot{h}(s)\, ds + C_1 \\ &= \int_0^t -10\, ds + C_1 \\ &= -10t + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad h(t) &= \int_0^t \dot{h}(s)\, ds + C_2 \\ &= \int_0^t (-10s + C_1)\ ds + C_2 \\ &= -5t^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ohne Berücksichtigung der Anfangswerte lautet

$$h(t) = -5t^2 + C_1 t + C_2.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangswerte ergibt sich:

$$h(0) = C_2 \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

$$\dot{h}(0) = C_1 \overset{!}{=} 20 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 20$$

und somit

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1.$$

b)

$$\begin{array}{rrcl} & h(t) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -5t^2+20t+1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t^2-4t-\frac{1}{5} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (t-2)^2-4-\frac{1}{5} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (t-2)^2 & = & \frac{21}{5} \\ \Leftrightarrow & t & = & 2\pm\sqrt{\frac{21}{5}} \approx -0{,}04939 \text{ oder } 4{,}04939 \end{array}$$

$\Rightarrow T = 2+\sqrt{\frac{21}{5}} \approx 4{,}04939$

c)

$$\dot{h}(T) = -10\left(2+\sqrt{\frac{21}{5}}\right)+20 = -10\sqrt{\frac{21}{5}} \approx -20{,}4939$$