Aufgabe 1: Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

a) den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0),(0,1)$,

b) das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

LÖSUNG:

a) Der Flächeninhalt, bzw. das zweidimensionale Volumen des gegebenen Dreiecks D berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 1-x\,dx \\
&= x-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \\
&= 1-\frac{1}{2}-0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Das Volumen des gegebenen Tetraeders T berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} 1\,dy\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} y\Big|_0^{1-x-z}\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} 1-x-z\,dx\,dz \\
&= \int_0^1 x-\frac{1}{2}x^2-zx\Big|_0^{1-z}\,dz \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}-z+\frac{1}{2}z^2\,dz \\
&= \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie das Sechseck, das durch die Punkte $P_1=(2,-1)$, $P_2=(0,-2)$, $P_3=(-2,-1)$, $P_4=(-2,1)$, $P_5=(0,2)$ und $P_6=(2,1)$ gegeben ist. Die eingeschlossene Fläche bezeichen wir mit H. Berechnen Sie die Fläche (das zweidimensionale Volumen) von H.

LÖSUNG: Da die Fläche achsensymmetrisch zur $x-$ und $y-$Achse ist, reicht es den Flächeninhalt des durch die Punkte $P_4 = (-2, 1)$, $P_5 = (0, 2)$, $P_7 = (0, 0)$ und $P_8 = (-2, 0)$ beschriebenen Trapezes zu berechnen und mit 4 zu multiplizieren.
Dazu berechnet man die Fläche unterhalb der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ von $x = -2$ bis $x = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(H) &= 4 \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x + 2 \, dx \\
&= 4 \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x \Big|_{-2}^{0} \right) \\
&= 4(-1 + 4) \\
&= 12
\end{aligned}$$

Alternativ integriert man 1 über das Trapez

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(H) &= 4 \int_{-2}^{0} \int_{0}^{\frac{1}{2}x+2} 1 \, dy \, dx \\
&= 4 \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x + 2 \, dx
\end{aligned}$$

und dann weiter wie oben.

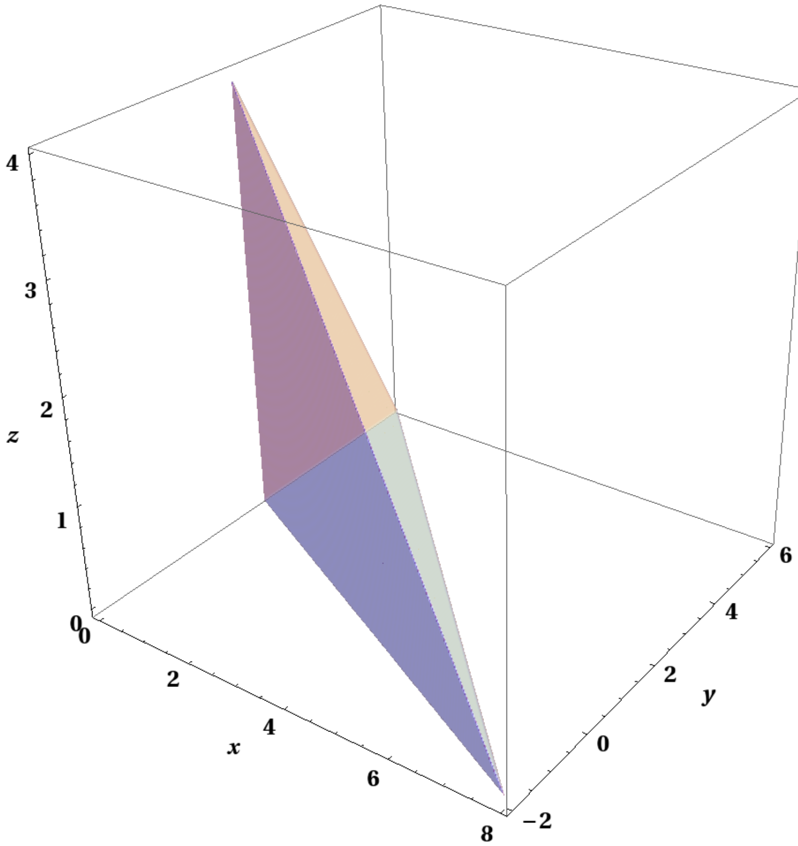
Aufgabe 3: Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen begrenzten Körpers

$$x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 4,$$

indem Sie das Volumen als Dreifachintegral schreiben.

LÖSUNG:
Bei den drei Flächen handelt es sich um folgende Ebenen:

- $x + y + z = 6$ ist eine Ebene, die durch die Punkte $(6, 0, 0)^T$, $(0, 6, 0)^T$ und $(0, 0, 6)^T$ aufgespannt wird.
- $z = 0$ ist die x,y-Ebene.
- $x = 0$ ist die y,z-Ebene.
- $x + 2y = 4$ ist eine zur x,y-Ebene senkrechte Ebene, die durch die Punkte $(0, 2, 0)^T$ und $(4, 0, 0)^T$ läuft.



Wir betrachten die Projektion des Körpers in die x,y-Ebene. Der Körper wird bezüglich der z-Achse von zwei Flächen begrenzt: Der x, y-Ebene und der Ebene $x + y + z = 6$. Wenn wir zuerst über z integrieren ergeben sich daher folgende Grenzen für z.

$$0 \leq z \leq 6 - x - y.$$

Bezüglich der x-Achse wird der Körper von drei Ebenen begrenzt und bezüglich der y-Achse von zwei Ebenen. Daher ist es einfacher als nächstes über y zu integrieren. Die begrenzenden Flächen sind die Ebenen $x + y + z = 6$ und $x + 2y = 4$, wobei die zweite Ebene die untere Grenze festlegt.

$$x + 2y = 4 \iff y = 2 - \frac{x}{2} \quad \ldots \text{ untere Grenze}$$

$$x + y + z = 6 \iff y = 6 - x - z$$

$$\implies 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 6 - x, \text{ da maximales } y \text{ bei } z = 0$$

Nun fehlen noch die Grenzen für x. Die untere Grenze für x ist die y,z-Ebene und die obere Grenze ist der Schnittpunkt der Ebenen $x + y + z = 6$, $x + 2y = 4$ und $z = 0$.

$$0 \leq x \leq 8$$

Nun können wir das Volumen des Körpers berechnen.

$$
\begin{aligned}
Vol_3(K) &= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \int_0^{6-x-y} 1 \; dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} 6-x-y \; dy\, dx \\
&= \int_0^8 \left[6y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \; dx \\
&= \int_0^8 8 - 2x + \frac{x^2}{8} \; dx \\
&= \left[8x - x^2 + \frac{x^3}{24}\right]_0^8 \; dx \\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie das Volumen des Volltorus, der durch Rotation der Kreisscheibe

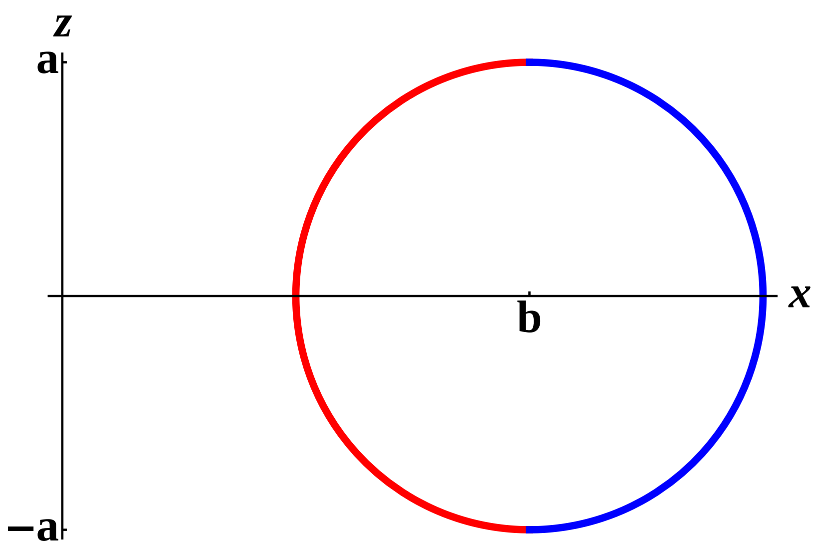
$$K = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x-b)^2 + z^2 \leq a^2\ \}$$

mit $0 < a < b$ um die z-Achse entsteht.
Tipp: Bei einem Integranden der Form $\sqrt{a^2 - z^2}$ und Integration in der Variablen z bietet sich die Substitution $z := a\sin(t)$ an.

LÖSUNG: Die Kreisscheibe liegt in der x, z-Ebene, hat den Mittelpunkt $(b, 0, 0)^T$ und den Radius a. Der Volltorus ergibt sich durch Rotation dieser Kreisscheibe um die z-Achse. Wir benötigen die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers, der um die z-Achse rotiert:

$$Vol(Rot) = \pi \int_{z_0}^{z_1} f(z)^2 \; dz$$

Dabei ist $f(z)$ der Radius der Kreisscheibe in der x, y-Ebene, die durch die Rotation um die z-Achse entsteht.
Das Volumen des Volltorus ergibt sich aus der Differenz des Rotationskörpers, der von dem nach außen gerichteten Teil des Torus begrenzt wird (blau) und des Rotationskörpers, der von dem nach innen gerichteten Teil des Torus begrenzt wird (rot).



Aus der Beziehung $(x-b)^2 + z^2 = a^2$ erhalten wir die Radien. Sie lauten

$$f_1(z) = b - \sqrt{a^2 - z^2} \ldots \text{ innen,}$$

$$f_2(z) = b + \sqrt{a^2 - z^2} \ldots \text{ außen.}$$

Da der Mittelpunkt der rotierenden Kreisscheibe in der x, y-Ebene, also bei $z = 0$, liegt und die rotierende Kreischeibe den Radius a besitzt, gilt $-a \leq z \leq a$. Das Volumen des Volltorus ist folglich:

$$\begin{aligned} Vol(Volltorus) &= \pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - z^2})^2 \; dz - \pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - z^2})^2 \; dz \\ &= \pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - z^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - z^2})^2 \; dz \\ &= \pi \int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - z^2} \; dz \end{aligned}$$

An dieser Stelle führen wir eine Koordinatentransformation (Substitution!) durch:

$$z = z(t) = a \sin t, \; dz = a \cos t \; dt \; ,$$

$$-a \leq z \leq a \implies -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Damit vereinfacht sich das Integral wie folgt:

$$\begin{aligned}
Vol(\mathit{Volltorus}) &= \pi \int\limits_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2 - z^2}\ \ dz \\
&= \pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4ab\cos t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\ \ dt \\
&= \pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 b\cos^2 t\ \ dt \\
&= \pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 b\left(\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\right)\ \ dt \\
&= 4\pi a^2 b\left[\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi a^2 b\left[\frac{\pi}{2}\right] \\
&= 2\pi^2 a^2 b\ .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Formel

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ ,$$

verwendet, die sich aus dem Additionstheorem der Cosinus-Funktion

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$$

und der bekannten Formel $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ ergibt. (Alternativ: partielle Integration)