Aufgabe 1: Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

LÖSUNG:

x_i	0	1	3	4
y_i	2	4	5	10

a) <u>Ansatz:</u> $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$\begin{aligned}
p(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 2 \\
p(1) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 2 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad \text{I} \\
p(3) = 5 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 1 \quad \text{II} \\
p(4) = 10 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 4a_2 + 16a_3 = 2 \quad \text{III}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} - \text{I}: \quad & 2a_2 + 8a_3 = -1 \\
\text{III} - \text{I}: \quad & 3a_2 + 15a_3 = 0 \ \Leftrightarrow \ a_2 = -5a_3 \\
& \Rightarrow \ -10a_3 + 8a_3 = -1 \\
& \Leftrightarrow \ 2a_3 = 1 \ \Leftrightarrow \ a_3 = \frac{1}{2} \\
& \Rightarrow \ a_2 = -\frac{5}{2} \\
\Rightarrow \quad & a_1 = 2 - a_2 - a_3 = 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\
\Rightarrow \quad & p(x) = 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
p(0) &= 2 \quad \checkmark \\
p(1) &= 2 + 4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 4 \quad \checkmark \\
p(3) &= 2 + 12 - \frac{45}{2} + \frac{27}{2} = 14 - \frac{18}{2} = 14 - 9 = 5 \quad \checkmark \\
p(4) &= 2 + 16 - 40 + 32 = 50 - 40 = 10 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Lagrangeformel: $p(x) = 2p_0(x) + 4p_1(x) + 5p_2(x) + 10p_3(x)$
mit:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x-1)(x^2-7x+12) \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x^3-8x^2+19x-12) \\
&= -\frac{1}{12}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{19}{12}x + 1 \\
p_1(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)} \\
&= \frac{1}{6}(x^3-7x^2+12x) \\
&= \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x \\
p_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)(x^3-5x^2+4x) \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}x \\
p_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)} \\
&= \frac{1}{12}(x^3-4x^2+3x) \\
&= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \left(-\frac{2}{12} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} + \frac{10}{12}\right)x^3 \\
&\quad + \left(\frac{4}{3} - \frac{14}{3} + \frac{25}{6} - \frac{10}{3}\right)x^2 \\
&\quad + \left(-\frac{19}{6} + 8 - \frac{10}{3} + \frac{5}{2}\right)x \\
&\quad + 2 \cdot 1 \\
&= 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
p(5) &= 2+20-\frac{125}{2}+\frac{125}{2}=22\\
\tilde{p}(x) &= p(x)+0{,}02\cdot p_2(x)\\
\Rightarrow\ \tilde{p}(5) &= p(5)+0{,}02\cdot p_2(5)\\
&= 22+\frac{2}{100}\cdot\left(-\frac{125}{6}+\frac{125}{6}-\frac{10}{3}\right)\\
&= 22-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\\
&= 22-\frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x)=\sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x)-p(x)|$ in $x=\frac{\pi}{4}$ explizit aus.

LÖSUNG:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\\
f(0) &= \sin 0 = 0\\
f(\pi/2) &= \sin(\pi/2)=1\\
f(\pi) &= \sin(\pi)=0\\
f(\pi/4) &= \sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Gesucht: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ mit $p(0)=0,\ p(\pi/2)=1,\ p(\pi)=0$

Lagrangeformel: $p(x)=0\,p_0(x)+1\,p_{\frac{\pi}{2}}(x)+0\,p_\pi(x)$

$$
\begin{aligned}
p_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)}\\
&= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)=\frac{4}{\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
p(0)=0 \quad&\Rightarrow\quad a_0=0\\
p(\pi/2)=1 \quad&\Rightarrow\quad a_1\frac{\pi}{2}+a_2\frac{\pi^2}{4}=1\\
&\Rightarrow\quad 2a_1\pi+a_2\pi^2=4 \quad \mathrm{I}\\
p(\pi)=0 \quad&\Rightarrow\quad a_1\pi+a_2\pi^2=0 \quad \mathrm{II}
\end{aligned}
$$

I-II: $a_1\pi=4 \ \Rightarrow\ a_1=\frac{4}{\pi}$
Einsetzen in II: $4+a_2\pi^2=0 \ \Leftrightarrow\ a_2=-\frac{4}{\pi^2}$.

Explizite Berechnung des Fehlers:

$$|p(\pi/4)-f(\pi/4)| = 0,75-0,707106781\approx 0,042893219$$