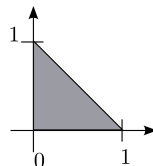


**Aufgabe 1:** Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

über das in der folgenden Zeichnung dargestellte Gebiet



LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^2 dy dx &= \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} y^2 dy dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 x^2 \frac{1}{3} (1-x)^3 dx \\ &= \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{4} x^2 (1-x)^4 \Big|_0^1 + \frac{2}{4} \int_0^1 x (1-x)^4 dx \right) \\ &= \frac{2}{3 \cdot 4} \int_0^1 x (1-x)^4 dx \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2} \left( -\frac{1}{5} x (1-x)^5 \Big|_0^1 + \frac{1}{5} \int_0^1 (1-x)^5 dx \right) \\ &= -\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} (1-x)^6 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

Alternativ kann man die Integration der Funktion  $f(x, y)$  über das dargestellte Gebiet auch wie folgt ansetzen:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 y^2 dx dy$$

**Aufgabe 2:** Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge bei

$$\int_0^5 \int_0^y f(x, y) \, dx \, dy.$$

D. h. geben Sie neue Integrationsgrenzen an, so daß gilt:

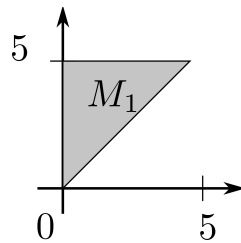
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^5 \int_0^y f(x, y) \, dx \, dy.$$

Dabei sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

LÖSUNG: Im gegebenen Integral wird über die Fläche

$$M_1 := \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \text{ und } 0 \leq y \leq 5\}$$

integriert. Diese sieht wie folgt aus



und läßt sich auch schreiben als

$$M_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5 \text{ und } x \leq y \leq 5\}.$$

Es gilt also

$$\int_0^5 \int_0^y f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^5 \int_x^5 f(x, y) \, dy \, dx$$