Aufgabe 1: Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

LÖSUNG: Angenommen die Grundfläche des Kegels liegt in der x_1, x_2-Ebene und die Spitze zeigt nach oben, d.h. in Richtung der positiven x_3-Achse. Um den Schwerpunkt $x_s = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ dieses Kegels K berechnen zu können, müssen wir als erstes seine Masse M_K berechnen. Dies geschieht mit Hilfe von Zylinderkoordinaten, wobei der Radius in Abhängigkeit von der Höhe angegeben werden muss.

$$
\begin{aligned}
M_K &= \int_K dx \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}z\right)^2 d\varphi \, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 \int_0^{2\pi} 1 - \frac{2}{5}z + \frac{1}{25}z^2 \, d\varphi \, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^5 2\pi \left(1 - \frac{2}{5}z + \frac{1}{25}z^2\right) dz \\
&= \pi \left(z - \frac{1}{5}z^2 + \frac{z^3}{75}\right)\Bigg|_0^5 \\
&= \pi \left(5 - 5 + \frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Anschließend berechnen wir komponentenweise, unter Benutzung der Zylinderkoordinaten, den Schwerpunkt.

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \frac{3}{5\pi} \int_K x_1 \, dx \\
&= \frac{3}{5\pi} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r\,(r\cos\varphi) \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \frac{3}{5\pi} \int_0^5 \int_0^{1-\frac{1}{5}z} r^2 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi\right)}_{=0} dr \, dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Da der Kegel achsensymmetrisch zur x_3-Achse ist, gilt

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 = 0.$$

Wir müssen also nur noch die dritte Komponente des Schwerpunktes berechnen:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3 &= \frac{3}{5\pi}\int_K x_3\,dx \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\frac{1}{5}z} rz\,dr\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{3}{5\pi}\int_0^5\frac{2\pi}{2}\left(1-\frac{1}{5}z\right)^2 z\,dz \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 z-\frac{2}{5}z^2+\frac{z^3}{25}\,dz \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{15}z^3+\frac{z^4}{100}\right)\Big|_0^5 \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{25}{2}-\frac{50}{3}+\frac{25}{4}\right) \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes lauten also

$$x_s=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Symmetrieachse in der Höhe $\frac{5}{4}$ über dem Boden.

Aufgabe 2: Betrachten Sie das folgende vereinfachte Modell der Dichteverteilung in der Erde: Sei $K\subset\mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $6\cdot 10^6$ (in Metern) um den Ursprung. K habe die Dichte (in kg/m^3)

$$\rho(x)=\begin{cases}12\cdot 10^3-\frac{\|x\|}{1\cdot 10^3} & \text{für}\quad \|x\|\le 3\cdot 10^6,\\ 6\cdot 10^3-\frac{\|x\|}{3\cdot 10^3} & \text{für}\quad \|x\|> 3\cdot 10^6.\end{cases}$$

Berechnen Sie die Masse von K.

Lösung: Unter Verwendung von Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_K &= \int_K \rho(r(x))\,dx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{6\cdot 10^6}\rho(r)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\left(\int_0^{3\cdot 10^6}12\cdot 10^3 r^2-10^{-3}r^3\,dr+\int_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6}6\cdot 10^3r^2-\tfrac{1}{3}10^{-3}r^3\,dr\right) \\
&= 2\pi(-\cos\pi+\cos 0)\left(4\cdot 10^3r^3-\tfrac{1}{4}10^{-3}r^4\Big|_0^{3\cdot 10^6}+2\cdot 10^3r^3-\tfrac{1}{12}10^{-3}r^4\Big|_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6}\right) \\
&= 4\pi\left(108\cdot 10^{21}-\tfrac{81}{4}\cdot 10^{21}+432\cdot 10^{21}-108\cdot 10^{21}-54\cdot 10^{21}+\tfrac{27}{4}\cdot 10^{21}\right) \\
&= 4\pi\tfrac{364}{2}\cdot 10^{21}=1458\pi\cdot 10^{21}\approx 4{,}58\cdot 10^{24}
\end{aligned}$$

Die Masse der Erde beträgt tatsächlich ungefähr $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Das Modell ist offensichtlich stark vereinfacht.

Aufgabe 3: Wir betrachten ein Rohr

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in [0, 10] \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \in \left[1, \frac{6}{5}\right] \right\},$$

bei dem das Wandmaterial die Dichte

$$\rho(x, y, z) = \frac{z + 4}{x^2 + y^2}$$

hat. Berechnen Sie die Masse des Rohres

$$\int_R \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

LÖSUNG: Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und $r^2 = x^2 + y^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_R &= \int_R \rho(r(x, y, z))\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_R \frac{z + 4}{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^{10} \int_0^{2\pi} \int_1^{\frac{6}{5}} \frac{z + 4}{r^2}\, r \; dr\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^{10} z + 4\, dz \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_1^{\frac{6}{5}} r^{-1}\, dr \\
&= \left[\tfrac{1}{2} z^2 + 4z\right]_0^{10} \; 2\pi \; [\ln r]_1^{\frac{6}{5}} \\
&= (50 + 40)\, 2\pi \, \ln \tfrac{6}{5} = 180\pi \ln \tfrac{6}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: a) Weisen Sie, unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung, nach, dass das Trägheitsmoment Θ_L einer Kugel der Masse M mit Radius R und Dichte $\rho \equiv 1$ gegeben ist durch:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, R^2$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit Dichte $\rho \equiv 1$ bezüglich der z-Achse. Dabei entstehe das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse $\left\{(x,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1\right\}$ um die z-Achse.
Tipp: Verwenden Sie eine Transformation um das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden. Nutzen Sie anschließend geeignete Koordinaten zur Integration.
Es gilt $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

c) Verwenden Sie das in der Vorlesung berechnete Volumen des Rotationsellipsoids, um nachzuweisen, dass man das Trägheitsmoment eines Rotatiosellipsoids mit konstanter Dichte folgendermaßen schreiben kann:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, a^2$$

LÖSUNG:

a) Nach Vorlesung ist $\Theta_L = \frac{8}{15}\pi R^5$. Das Volumen einer Kugel ist $\frac{4}{3}\pi R^3$. Wegen $\rho \equiv 1$ ist dies auch die Masse. Also gilt

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,\tfrac{4}{3}\pi R^3\, R^2 = \tfrac{2}{5}\, M\, R^2$$

b) Die Transformation $g(x,y,z) = (ax, ay, bz)$ bildet die Einheitskugel K_1 auf das gegebene Rotationsellipsoid E ab, also $g(K_1) = E$. Hierzu ist $\det Dg(x,y,z) = a^2 b$. Zur Integration über die Einheitskugel werden Kugelkoordinaten verwendet.

$$
\begin{aligned}
\Theta_L &= \int_E d_L^2(x,y)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_E x^2 + y^2\, dx\, dy\, dz \\
&\quad \text{(Pythagoras: Abstand eines Punktes in der } x{,}y\text{-Ebene vom Ursprung)} \\
&= \int_{K_1} \left((a\bar{x})^2 + (a\bar{y})^2\right)\; a^2 b\; d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z} \\
&= a^4 b \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin\vartheta)^2\, r^2 \sin\vartheta\;\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\
&\quad \text{(Abstand von der } z\text{-Achse hängt jetzt von } r \text{ und } \vartheta \text{ ab)} \\
&= a^4 b \int_0^{2\pi} d\varphi \;\; \int_0^1 r^4\, dr \;\; \int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta \\
&= a^4 b\, 2\pi\, \frac{1}{5}\, \frac{1}{4} \int_0^\pi 3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta\, d\vartheta \\
&= a^4 b\, \pi\, \tfrac{1}{10} \left[-3\cos\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta\right]_0^\pi d\vartheta \\
&= a^4 b\, \pi\, \tfrac{1}{10} \left(3 - \tfrac{1}{3} + 3 - \tfrac{1}{3}\right) \\
&= a^4 b\, \pi\, \tfrac{1}{10}\tfrac{16}{3} = \tfrac{8}{15} a^4 b \pi
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Im Falle der Kugel in Teil a) ist $a = b = R$ und man erhält die bereits bekannte Formel.

c) Das Volumen des Rotationsellipsoids (und wegen $\rho \equiv 1$ auch die Masse) ist $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. Zusammen mit dem obigen Ergebnis ergibt sich sofort

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\,\tfrac{4}{3}\pi a^2 b\, a^2 = \tfrac{2}{5}\, M\, a^2$$