Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

a) Sei
$$z = a + ib \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
Wie ist die komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ definiert?

b) Sei
$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r, \varphi \in \mathbb{R}.$$
Geben Sie $\overline{z}$ und $z\overline{z}$ in dieser Form an.

c) Sei
$$z = a + ib \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
Geben Sie $\frac{1}{z}$ in dieser Form an.

d) Zeichnen Sie die Menge
$$\{e^{i\varphi} \,|\, \varphi \in \mathbb{R}\}$$
in der komplexen Ebene.

LÖSUNG:

a) $\overline{z} = a - ib$

b) $\overline{z} = re^{-i\varphi} \qquad z\overline{z} = re^{i\varphi}re^{-i\varphi} = r^2$

c) $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

d) Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{3}yz + 4z^2 = 1\right\}$$

ein Ellipsoid ist, indem Sie (mittels Hauptachsentransformation) Richtung und Länge der Halbachsen angeben.

LÖSUNG:

$$3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{3}yz + 4z^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - (3-\lambda)3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (3-\lambda)(5 - 6\lambda + \lambda^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (3-\lambda)((\lambda-3)^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ oder } \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = 5 \end{aligned}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:
Berechnung des Eigenvektors zu $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = z = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eigenvektors zu $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ und } y = \sqrt{3}z \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eigenvektors zu $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ und } z = -\sqrt{3}y \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die Halbachsen weisen in die Richtungen v_1, v_2, v_3 und haben die Längen $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q}$, so dass $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}$ eine Diagonalmatrix ist. Ist $\mathbf{A}$ positiv definit?

LÖSUNG:

a) **Bestimmung der Eigenwerte:**

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 6 - 7\lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:
Berechnung des Eigenvektors zu $\lambda_1 = 1$:

$$(A - \mathbb{1})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eigenvektors zu $\lambda_2 = 6$:

$$(A - 6\mathbb{1})x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow -2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Da v_1, v_2 oben als normierte Eigenvektoren bestimmt wurden, ist

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

schon eine orthogonale Matrix und es gilt $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} = \mathbf{D} = \mathrm{diag}(1, 6)$. Da die Eigenwerte positiv sind, ist $\mathbf{A}$ positiv definit. (Dies war eine Bemerkung in der Vorlesung)