

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: .....

Vorname: .....

Matrikel-Nr.: .....

Aufgabe:	1	2	3	$\emptyset$
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet.  
Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

**Aufgabe 1:** a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{5x}{x^2 - x - 6} dx.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 x^3 \ln |x| dx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x - 3\pi) dx.$$

**Aufgabe 2:** Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied  $O(\|\cdot\|^3)$ ) für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)^2$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  an.

**Aufgabe 3:** Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sowie die Knoten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$ .

- a) Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.
- b) Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion  $f(x)$  zu diesen Knoten.
- c) Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von  $-1$  bis  $1$  mit den Knoten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  an.
- d) Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

an.

- e) Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion  $f$ ?
- f) Geben Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

an. (ohne Rechnung)

### Formelsammlung:

- Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = - \int_a^b f(x)g'(x) dx + [f(x)g(x)]_a^b$$

- Substitutionsregel

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds.$$

- Taylorentwicklung

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{f''(x)}{2}(y - x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y - x)^n + R_{n+1}(y)$$

- Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$