Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z \geq 0\}$$

mit Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel H.

LÖSUNG: Die volle Kugel hat Radius $R = 3$. Berechnung der Masse mit Hilfe von Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} M_H = \int_H dx &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\ &= \int_0^3 r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \left[\tfrac{1}{3} r^3\right]_0^3 \left[-\cos(\vartheta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\ 2\pi \\ &= 9 \cdot 1 \cdot 2\pi = 18\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \end{aligned}$$

Berechnung des Schwerpunktes x_s: Aus Symmetriegründen ist $(x_s)_1 = (x_s)_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
(x_s)_3 &= \frac{1}{18\pi} \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r\cos(\vartheta)\, r^2 \sin(\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\
&= \frac{1}{18\pi} \left[\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^3 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\, d\vartheta \\
&= \frac{1}{18\pi} \frac{81}{4} 2\pi \left[\frac{1}{2}\sin^2(\vartheta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_s = \left(0, 0, \tfrac{9}{8}\right)$$

Aufgabe 2: a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot r(t) = \frac{1}{5} t\, r(t) \text{ mit dem Anfangswert } r(0) = r_0 > 0.$$

b) Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot y(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0\,.$$

Geben Sie zu einem Zeitschritt $\tau > 0$ das Cauchy-Euler-Verfahren an. Wenden Sie dieses dann auf das Anfangswertproblem aus Teilaufgabe a) an.

c) Von welcher Konvergenzordnung ist dieses Verfahren für eine stetig differenzierbare Funktion f und was bedeutet dies für den Approximationsfehler?

Lösung:

a) Separation der Variablen:

$$\frac{dr}{dt} = \dot r(t) = \frac{1}{5} t\, r(t)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{1}{\tilde r}\, d\tilde r = \int_0^t \frac{1}{5} s\, ds \\
\Leftrightarrow \qquad & \ln(r(t)) - \ln(r_0) = \frac{1}{10} t^2 \\
\Leftrightarrow \qquad & r(t) = e^{\frac{1}{10} t^2} + r_0
\end{aligned}$$

b) Cauchy-Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \frac{\tau_i}{2} f(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \tau_i f\left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Hier ist $f(t, r(t)) = \frac{1}{5} t\, r(t)$, also

$$\begin{aligned} r_0 &= r(0) \\ r_{i+\frac{1}{2}} &= r_i + \frac{\tau}{2}\frac{1}{5} t_i r_i \\ r_{i+1} &= r_i + \tau \frac{1}{5}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right) r_{i+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

c) Falls f stetig differenzierbar ist, ist das Cauchy-Euler-Verfahren konvergent von zweiter Ordnung, d.h.

$$||y(t_i) - y_i|| = O(\tau^2) \quad , \tau = \max_{i=0,\ldots,n-1} \tau_i$$

Aufgabe 3: Differenzieren Sie die durch

$$f(x) = \int_{2x}^{3x} x^3 y^2 + \frac{1}{\log y}\, dy \qquad \text{für} \quad x \geq 1$$

definierte Funktion f nach x und schreiben Sie die Lösung ohne Integral.

LÖSUNG: Leibniz-Formel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_{2x}^{3x} 3x^2y^2\, dy + \left(9x^5 + \frac{1}{\ln(3x)}\right)3 - \left(4x^5 + \frac{1}{\ln(2x)}\right)2 \\ &= \left[x^2y^3\right]_{2x}^{3x} + 27x^5 + \frac{3}{\ln(3x)} - 8x^5 - \frac{2}{\ln(2x)} \\ &= 27x^5 - 8x^5 + 19x^5 + \frac{3}{\ln(3x)} - \frac{2}{\ln(2x)} \\ &= 38x^5 + \frac{3}{\ln(3x)} - \frac{2}{\ln(2x)} \end{aligned}$$