Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{5x}{x^2 - x - 6}\, dx.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 x^3 \ln|x|\, dx.$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(4x - 3\pi\right)\, dx.$$

Lösung:

a)

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{5x}{(x+2)(x-3)} &= \frac{A}{x+2}\frac{B}{x-3} \\
\Leftrightarrow 5x &= A(x-3) + B(x+2) \\
\Leftrightarrow 5x &= (A+B)x - 3A + 2B \\
\Leftrightarrow 3A &= 2B \text{ und } A + B = 5 \\
\Leftrightarrow A &= \frac{2}{3}B \text{ und } \left(\frac{2}{3}+1\right) B = 5 \\
\Leftrightarrow A &= \frac{2}{3}B \text{ und } B = 3 \\
\Leftrightarrow A &= 2 \text{ und } B = 3
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{5x}{x^2 - x - 6}\, dx = \int \frac{2}{x+2}\, dx + \int \frac{3}{x-3}\, dx = 2\ln(x+2) + 3\ln(x-3)
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 x^3 \ln|x|\, dx &= -\int_1^2 \frac{1}{4}x^4\, \frac{1}{x}\, dx + \left[\frac{1}{4}x^4\, \ln|x|\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{4}\int_1^2 x^3\, dx + 4\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(1) \\
&= \left[-\frac{1}{16}x^4\right]_1^2 + 4\ln(2) \\
&= -1 + \frac{1}{16} + 4\ln(2) \\
&= -\frac{15}{16} + 4\ln(2)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x - 3\pi)\, dx &= \int_{-3\pi}^{-\pi} \sin(y)\frac{1}{4}\, dy \quad \left(y = 4x - 3\pi, \frac{dy}{dy} = 4\right) \\
&= \left[-\frac{1}{4}\cos(y)\right]_{-3\pi}^{-\pi} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied $O(\|\cdot\|^3)$) für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)^2$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x)^2 \\
f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
f''(x) &= 2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2
\end{aligned}
$$

Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + O(\|x - x_0\|^3) \\
&= \sin(x_0)^2 + 2\sin(x_0)\cos(x_0)(x - x_0) + (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)(x - x_0)^2 + O(\|x - x_0\|^3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sowie die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Lagrange-Basis zu den oben angegebenen Knoten.

b) Berechnen Sie die Lagrange-Interpolation der Funktion $f(x)$ zu diesen Knoten.

c) Geben Sie die Quadraturformel (numerische Integrationsformel) zur Approximation eines Integrals von -1 bis 1 mit den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ an.

d) Wenden Sie die Quadraturformel zur näherungsweisen Berechnung des Integrals
$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$
an.

e) Welche geometrische Figur beschreibt der Graph der Funktion f?

f) Geben Sie den exakten Wert des Integrals
$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$
an. (ohne Rechnung)

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x}{-1} \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2} x(x - 1) \\
L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x + 1}{1} \frac{x - 1}{-1} = -(x + 1)(x - 1) \\
L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x + 1}{1 + 1} \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2} x(x + 1)
\end{aligned}$$

b)

$$p(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x) = L_1(x) = -(x+1)(x-1) = -x^2 + 1$$

c)

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 + x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}f(x_0) + \frac{2}{3}f(x_1) + \frac{1}{6}f(x_2)\right)$$

d)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left(\frac{1}{6}\,0 + \frac{2}{3}\,1 + \frac{1}{6}\,0\right) = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

e) Oberer Halbkreis.

f) $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \approx 1.57$

Formelsammlung:

- Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + [f(x)g(x)]_a^b$$

- Substitutionsregel

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds.$$

- Taylorentwicklung

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2}(y-x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + R_{n+1}(y)$$

- Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$