Aufgabe 1: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t)}{t}$$

für $t > 1$ mit dem Anfangswert $y(1) = 1$.

LÖSUNG: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t)$$

mit Anfangswert $y_0 = y(t_0)$ gegeben ist durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) y_0.$$

In unseren Fall ist $a(t) = \frac{1}{t}$, so dass wir als Lösung für unsere Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(\int_1^t \frac{1}{s}\,ds\right) \cdot 1 \\ &= \exp(\ln t - \ln 1) \\ &= e^{\ln t} \\ &= t \end{aligned}$$

erhalten.

Alternativ: Diese Aufgabe lässt sich auch durch Separation der Variablen lösen.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = y(t), \quad y(0) = 1\,.$$

Berechnen Sie $y(2)$ unter Verwendung des Eulerschen Polygonzugverfahrens und des Cauchy-Euler-Verfahrens, jeweils mit Schrittweiten $\tau = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ (mit Hilfe eines Taschenrechners).
Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung an und vergleichen Sie den exakten Wert von $y(2)$ mit den zuvor errechneten. Wie verhält sich die Größe des Fehler in Abhängigkeit der Schrittweite für die beiden Verfahren?

LÖSUNG: Das Eulersche Polygonzugverfahren ist gegeben durch:

$$y_{i+1} = y_i + \tau_i f(t_i, y_i)\,.$$

Da $f(t_i, y_i) = y_i$, gilt hier also

$$y_{i+1} = y_i + \tau_i y_i \quad \Leftrightarrow \quad y_{i+1} = (1 + \tau_i) y_i\,.$$

Mit $y_0 = 1$ und einer festen Schrittweite τ folgt:

$$y_n^{\mathrm{EP}}(\tau) = (1+\tau)^n$$

Für das Cauchy-Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \frac{\tau_i}{2} f(t_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \tau_i f\left(t_i + \frac{\tau_i}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \frac{\tau_i}{2} y_i \\ y_{i+1} &= y_i + \tau_i y_{i+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen also

$$y_{i+1} = y_i + \tau_i \left(y_i + \frac{\tau_i}{2} y_i\right)$$

und mit $y_0 = 1$ und einer festen Schrittweite τ:

$$y_n^{\mathrm{CE}}(\tau) = \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right)^n$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist $y(t) = e^t$. Somit ist $y(2) = e^2 \approx 7.3891$.

τ	n	$y_n^{\mathrm{EP}}(\tau)$	$y_n^{\mathrm{CE}}(\tau)$	$\lvert y_n^{\mathrm{EP}}(\tau) - e^2\rvert$	$\lvert y_n^{\mathrm{CE}}(\tau) - e^2\rvert$
1	2	4	6.25	3.3891	1.1391
$\frac{1}{2}$	4	5.0625	6.9729	2.3266	0.4162
$\frac{1}{4}$	8	5.9605	7.2622	1.4286	0.1268
$\frac{1}{8}$	16	6.5833	7.3541	0.8058	0.0350
$\frac{1}{16}$	32	6.9587	7.3799	0.4304	0.0092
$\frac{1}{32}$	64	7.1663	7.3867	0.2228	0.0023

Zunächst fällt der generell kleinere Fehler bei Verwendung des Cauchy-Euler-Verfahrens auf. Des Weiteren führt eine Halbierung der Schrittweite beim Cauchy-Euler-Verfahren im letzten Schritt zu einer Viertelung des Fehlers (genauer ist der Quotient aus dem Fehler für $\tau = \frac{1}{32}$ und dem für $\tau = \frac{1}{16}$ 0.25). Bei Verwendung des Eulerschen Polygonzugverfahrens ist die Abnahme nur halb so groß (Quotient 0.53). Darin spiegelt sich die Tatsache wider, dass das Cauchy-Euler-Verfahren ein Verfahren 2. Ordnung ist, während das Eulersche Polygonzugverfahren nur Ordnung 1 besitzt.