Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: a) Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei orthogonalen Matrizen orthogonal ist.

b) Zeigen Sie, dass die Spiegelung

$$S = \mathbb{1} - 2nn^T$$

mit $\|n\| = 1$ orthogonal ist.

c) Berechnen sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Lösung:

a) $(AB)(AB)^T = (AB)(B^T A^T) = A(BB^T)A^T = A\mathbb{1}A^T = AA^T = \mathbb{1}$

b)

$$\begin{aligned} SS^T &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T)^T \\ &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1}^T - 2(n^T)^T n^T) \\ &= (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) \\ &= \mathbb{1} - 2nn^T - 2nn^T + (2nn^T)(2nn^T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T nn^T \\
&= \mathbb{1} - 4nn^T + 4n(n^T n)n^T \\
&= \mathbb{1} - 4nn^T + 4\|n\|^2 nn^T \\
&= \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

so $S^T = S^{-1} \Rightarrow S$ is orthogonal.

c)
- $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ and so $\alpha_1 = -\operatorname{sgn}(a_{11})\|a_1\| = -\sqrt{3^2 + 4^2} = -5$
- $v_1 = a_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $Q^{(1)} = \mathbb{1} + \dfrac{v_1 v_1^T}{\alpha_1 v_{11}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{40}\begin{pmatrix} 8^2 & 8 \cdot 4 \\ 8 \cdot 4 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

  Alternativ (und effizienter):

$$Q^{(1)}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

- $A^{(1)} = Q^{(1)}A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Die QR-Zerlegung ist dann $A = QR$ mit $Q = (Q^{(1)})^T$ und $R = A^{(1)}$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Sei

$$x : [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h^2 \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung einer Fläche $P \subset \mathbb{R}^3$ und

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_1(t) &= (t, \pi), \\
\gamma_2 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, & \gamma_2(t) &= (1, t)
\end{aligned}$$

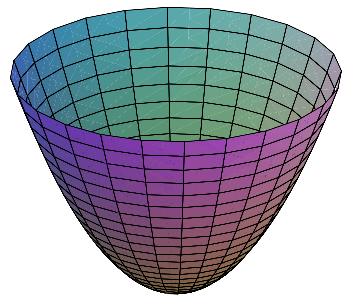
Kurven im Definitionsbereich von x.

a) Skizzieren Sie die Fläche P.

b) Berechnen Sie die Oberfläche von P.

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $x \circ \gamma_2$.

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Kurven $x \circ \gamma_1$ und $x \circ \gamma_2$ im Schnittpunkt $(h, \varphi) = (1, \pi)$.



a)

LÖSUNG:

b)

$$Dx = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -h\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & h\cos(\varphi) \\ 2h & 0 \end{pmatrix}$$

Metrik:

$$g = Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 1+4h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$$\det g = (1+4h^2)h^2 = h^2 + 4h^4$$

Dann gilt

$$\int_P 1 dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} h\sqrt{1+4h^2} d\varphi dh$$

$$(\text{Substitution: } z = 1+4h^2, \frac{dz}{dh} = 8h) = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} h\sqrt{1+4h^2} dh = 2\pi \int_0^3 h\sqrt{z}\frac{dz}{8h}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^3 \sqrt{z} dz = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

c) Aus der Vorlesung: Bogenlänge: $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{x}(\xi)\| d\xi$, also

$$\int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

d) Parametrisierungen:

$$x \circ \gamma_1 = \begin{pmatrix} t\cos(\pi) \\ t\sin(\pi) \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad x \circ \gamma_2 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangentialvektoren:

$$\frac{d}{dt} x \circ \gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} x \circ \gamma_2 = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Winkels an der Stelle $(1, \pi)$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = 0$$

d.h. $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$.
Alternativ:

$$\cos(\alpha) = \frac{g(v,w)}{\sqrt{g(v,v)}\sqrt{g(w,w)}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}\sqrt{1}} = 0,$$

wobei $v = \dot{\gamma}_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = \dot{\gamma}_2(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die Fläche eines Kreises mit Radius 2 mit Hilfe eines geeigneten Integrals über den Rand des Kreises.

LÖSUNG: Der Kreis K mit Radius 2 is gegeben als die Menge

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

d.h. der Rand ∂K ist

$$\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Parametrisierung: $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt von K ist nun

$$\begin{aligned} \text{Fläche}(K) &= \int_K dx = \int_{\partial K} N \cdot f(x_1, x_2) dl \overset{\operatorname{div} f = 1}{=} \int_{\partial K} \frac{x}{\|x\|} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} dl \\ &= \int_{\partial K} \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} dl \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{(2\cos(\varphi))^2}{\sqrt{(2\cos(\varphi))^2 + (2\sin(\varphi))^2}} 2d\varphi \\
&= 4\int_0^{2\pi} \frac{(\cos(\varphi))^2}{2} 2d\varphi \\
&= 4\left[\frac{1}{2}(\varphi + \sin(\varphi) + \cos(\varphi))\right]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$