Ingenieurmathematik III — Lernstandserhebung 2 **23./24.01.2014**

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe:	1	2	3	∅
Note:				

Jede Aufgabe wird mit A (gut), B (ausreichend) oder C (nicht ausreichend) bewertet. Die Gesamtnote ergibt sich als Durchschnitt der Einzelnoten.

Aufgabe 1: Gegeben seien die Flächen

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und

$$Z_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = \alpha\}$$

mit $\alpha \geq 0$.

a) Für welche α ist $K \cap Z_\alpha = \emptyset$?

b) Für welche α ist $K \cap Z_\alpha$ eine differenzierbare Kurve (im Sinne der Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen)? Berechnen Sie für diese α den Tangentialraum!

c) Beschreiben Sie K, Z_α und $K \cap Z_\alpha$ geometrisch.

LÖSUNG:

a) $K \cap Z_\alpha$ ist genau dann nichtleer, wenn es einen Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, für den sowohl $x^2 + y^2 = \alpha$, als auch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gilt. Wegen der ersten Gleichung ist klar, dass hierfür $\alpha \geq 0$ gelten muss. Durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung sieht man leicht, dass

$$x^2 + y^2 = \alpha \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \alpha \text{ und } z^2 = 1 - \alpha.$$

Da $z^2 \geq 0$, muss also auch gelten $\alpha \leq 1$. Für $\alpha \in [0,1]$ existieren aber immer $x, y \in \mathbb{R}$, sodass $x^2 + y^2 = \alpha$. Der Punkt $\left(x, y, \pm\sqrt{1-\alpha}\right)$ liegt dann im Schnitt von K und Z_α. Es gilt also

$$K \cap Z_\alpha = \emptyset \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

b) Nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 13.19) ist $\mathcal{M} = K \cap Z_\alpha$ eine differenzierbare Kurve, falls $0 < \alpha < 1$, was man wie folgt sieht: Definiere

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} g(x,y,z) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - \alpha \end{pmatrix} \text{ mit } Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $f(x,y,z) = 0$. Im Fall $\alpha = 1$ handelt es sich um den Kreis $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)^T \in \mathbb{R}^3$ mit dem Tangentialraum $T_p\mathcal{M} = \operatorname{span}\{(-\sin(t), \cos(t), 0)^T\}$ (der Satz über implizite Funktionen ist für $\alpha = 1$ nicht anwendbar). Sei nun $0 < \alpha < 1$. Dann gilt stets $z = \pm\sqrt{1-\alpha} \neq 0$. Die Matrix

$$D_{(y,z)}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

ist also für $(x,y,z) \neq (\pm\sqrt{\alpha}, 0, \pm\sqrt{1-\alpha})$ invertierbar (in diesen Punkten müssen x und y vertauscht werden) und nach dem Satz über implizite Funktionen ist die Schnittmenge lokal als Funktion parametrisierbar.

Der Tangentialraum für $p \in \mathcal{M}$ ist

$$T_p\mathcal{M} = \operatorname{span}\{\nabla g \times \nabla h\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

c) K ist die Sphäre mit Radius 1. Z_α ist die Oberfläche eines unendlichen Zylinders mit Radius $\sqrt{\alpha}$. $K \cap Z_\alpha$ ist für $\alpha = 1$ ein Kreis, für $\alpha \in (0,1)$ zwei Kreise, für $\alpha = 0$ zwei Punkte und für alle anderen α leer.

Aufgabe 2: Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied $O(\|\cdot\|^3)$) für folgende Funktionen an:

a) *Eindimensionale Taylorentwicklung*:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)^2$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$

b) *Zweidimensionale Taylorentwicklung*:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sin(x)^2 \cos(y^2)$ um den Entwicklungspunkt

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Lösung:

a) Zunächst berechnen wir die erste und zweite Ableitung von f. Mit Produkt- bzw. Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2(x) \\ f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ f''(x) &= 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x). \end{aligned}$$

Entwickelt man nun die Funktion um den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, so liefert der Satz von Taylor für einen Punkt $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}\left(|x - x_0|^3\right) \\ =& \sin^2(x_0) + 2\sin(x_0)\cos(x_0)(x - x_0) + \left(\cos^2(x_0) - \sin^2(x_0)\right)(x - x_0)^2 \\ &+ \mathcal{O}\left(|x - x_0|^3\right). \end{aligned}$$

b) Der Satz von Taylor liefert in 2 Dimensionen

$$f(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot D^2 f(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|^3\right).$$

Zu berechnen sind also nur noch die Ableitungen von f. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x)\cos(x)\cos(y^2) \\ -2\sin^2(x)\sin(y^2)y \end{pmatrix}$$

und daher $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die zweiten Ableitungen lauten

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\cos^2(x)\cos(y^2) - 2\sin^2(x)\cos(y^2) & -4y\sin(x)\cos(x)\sin(y^2) \\ -4y\sin(x)\cos(x)\sin(y^2) & -4y^2\sin^2(x)\cos(y^2) - 2\sin^2(x)\sin(y^2) \end{pmatrix}$$

und daher

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit der Formel für die Taylorentwicklung ergibt diese

$$f(x, y) = x^2 + \mathcal{O}\left(\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|^3\right).$$

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^3 - y^2 - 5y - 3.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Welche dieser kritischen Punkte gehören zu (lokalen) Minima, (lokalen) Maxima oder Sattelpunkten? Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

LÖSUNG:

a) Per Definition sind die kritischen Punkte die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen der Gradient von f verschwindet. Der Gradient von f ist gegeben durch

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 - 2y - 5 \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\nabla f(x, y) = 0$ genau dann gilt wenn $(x, y) \in \big\{(0, -1), \big(0, \frac{5}{3}\big)\big\}$. Dies sind also die kritischen Punkte.

b) Zunächst berechnen wir die Matrix der zweiten Ableitungen. Es gilt

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y - 2 \end{pmatrix}.$$

Im Fall von $(x, y) = (0, -1)$ ergibt sich damit

$$D^2 f(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte 2 und -8 und ist damit indefinit. Am kritischen Punkt $(0, -1)$ befindet sich damit ein Sattelpunkt.

Am Punkt $\big(0, \frac{5}{3}\big)$ ergibt sich

$$D^2 f\left(0, \frac{5}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte 2 und 8 und ist damit positiv definit. Am kritischen Punkt $\big(0, \frac{5}{3}\big)$ befindet sich damit ein lokales Minimum.