Aufgabe 1: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

Aufgabe 2:

a) Seien $g : [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$ Polarkordinaten im $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Fläche $g(U) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $U = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi]$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

b) Sei $x : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ die Parametrisierung einer Fläche $K \subset \mathbb{R}^3$. Skizziere Sie die Fläche K und berechnen Sie deren Oberfläche.

c) Welche geometrische Bedeutung hat es, dass die Flächen den gleichen Oberflächeninhalt haben?

Aufgabe 3: Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.

Tipp:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{4}$$