Aufgabe 1: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 1)$ und $h \in [0, 1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

LÖSUNG:

a) Die Parametrisierung beschreibt einen Zylindermantel. Der Zylinder hat eine Grundfläche von Radius 1, die Höhe 1 und die Symmetrieachse des Zylinders liegt auf der z-Achse des Koordinatensystems.

b)

$$\begin{aligned} x \circ \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1] \\ x \circ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 1) \end{aligned}$$

Bei der Kurve $x \circ \gamma_1$ handelt es sich um eine Strecke vom Punkt $(1,0,0)$ zum Punkt $(1,0,1)$. Sie verläuft parallel zur Symmetrieachse des Zylinders und steht senkrecht auf der $x-y-$Ebene und somit senkrecht auf der Grundfläche des Zylinders.
Die Kurve $x \circ \gamma_2$ ist eine geschlossene Kreiskurve auf dem Zylindermantel. Sie liegt auf Höhe $\frac{1}{2}$ und verläuft parallel zur Grundfläche des Zylinders.

c) Mit Hilfe der beiden Kurven aus dem vorherigen Aufgabenteil sollen zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt

$$x\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Da $\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gilt, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(x \circ \gamma_1(t)\right)\Big|_{t=\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\left(x \circ \gamma_2(t)\right)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ lauten also $v_1 = (0,0,1)^T$ und $v_2 = (0, 2\pi, 0)^T$. Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie den ganzen Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ auf.

d) Da die beiden Vektoren v_1 und v_2 den Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ aufspannen, berechnet sich der Normalenvektor an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ wie folgt:

$$n = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Der metrische Tensor G auf der Mantelfläche des Zylinders berechnet sich wie folgt

$$G = (Dx)^T Dx$$

und

$$Dx = \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f) Aus dem Skript wissen wir, dass sich die Länger l_1 der Kurve $x \circ \gamma_1$ auf dem Zylindermantel wie folgt mit Hilfe des metrischen Tensors berechnen läßt.

$$\begin{aligned} l_1 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot\gamma_1(t)\cdot\dot\gamma_1(t)}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für die Länge l_2 der Kurve $x \circ \gamma_2$ auf dem Zylindermantel ergibt sich

$$\begin{aligned} l_2 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot\gamma_2(t)\cdot\dot\gamma_2(t)}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\ &= \int_0^1 2\pi\,dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

g) Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt $x\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Um den Winkel α zu berechnen, in dem sie sich schneiden, benötigen wir die beiden Tangentialvektoren

v_1 und v_2. Nun gilt

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\,\|v_2\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\pi\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}0\\2\pi\\0\end{pmatrix}\right\|} \\ &= 0\end{aligned}$$

Daraus folgt die beiden Kurven schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2:

a) Seien $g : [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta)\end{pmatrix}$ Polarkordinaten im $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Fläche $g(U) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $U = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi]$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

b) Sei $x : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h\end{pmatrix}$ die Parametrisierung einer Fläche $K \subset \mathbb{R}^3$. Skizziere Sie die Fläche K und berechnen Sie deren Oberfläche.

c) Welche geometrische Bedeutung hat es, dass die Flächen den gleichen Oberflächeninhalt haben?

Lösung:

a) Es gilt

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

und $\det(Dg) = r$. Der Flächeninhalt des Kreissektors $g(U)$ („Tortenstück“) berechnet sich nun wiefolgt:

$$\begin{aligned}\text{Flächeninhalt}(g(U)) &= \int_{g(U)} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}\pi} \det(Dg) d\theta dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}\pi} r d\theta dr = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}\pi r dr = \sqrt{2}\pi[\frac{1}{2}r^2]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$Dx = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -h\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & h\cos(\varphi) \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

und damit
$$Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}.$$
Der Oberflächeninhalt des Kegels K berechnet sich nun wiefolgt:
$$\begin{aligned}\text{Oberflächeninhalt}(K) &= \int_K da = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(Dx^T Dx)} d\varphi dh \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2} h d\varphi dh = \int_0^1 2\sqrt{2}\pi h dr = 2\sqrt{2}\pi [\frac{1}{2}h^2]_0^1 = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

c) Kleben wir die den Kreissektor $g(U)$ aus Teilaufgabe a) an den Enden (d.h. $g(.,0)$ und $g(.,\sqrt{2}\pi)$) zusammen, so erhalten wir genau den Kegel K aus Teilaufgabe b).

Aufgabe 3: Berechnen Sie das Integral
$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\, dl$$
über den Rand des Kreises $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.

Tipp:
$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}$$

LÖSUNG:

a) Um das Integral auf direktem Weg zu berechnen, geben wir als erstes eine Parametrisierung von ∂K als Kurve an:
$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$
Bei der Kurve handelt es sich um eine geschlossene Kreiskurve um den Ursprung mit Radius 1. Der Normalenvektor an die Kurve ist der Vektor $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich
$$\begin{aligned}\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\, dl &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}\right) dt \\ &= \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

b) Alternativ kann man das Integral auch mit Hilfe des Satz von Gauß berechnen. Danach gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} dx \, dy \\
&= \int_K 3x^2 + 3y^2 \, dx \, dy
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3\left(r\cos\varphi\right)^2 + 3\left(r\sin\varphi\right)^2\right) r \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3 \, d\varphi \, dr \\
&= 6\pi \int_0^1 r^3 \, dr \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$