Aufgabe 4: Betrachten Sie die folgenden Vektorfelder

$$\text{(i) } f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } h(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und die Gebiete

$$K = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$$

und

$$\Omega = \{(x,y) \mid -1 < x < 1 \text{ und } -1 < y < 1\}.$$

Skizzieren Sie die Vektorfelder (i) und (iii) für das Gebiet Ω und (ii) für das Gebiet K.
Wenden Sie den Gaußschen Integralsatz auf die Vektorfelder bzgl. des jeweiligen Gebiets an, berechnen Sie hierfür beide Seite des Integralsatzes und deuten Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 5: Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{B} = e^{t\mathbf{A}}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$. Welche Matrix erhalten Sie?

c) Zeigen Sie $\mathbf{B}^{-1} = e^{t\mathbf{A}^T} = (e^{t\mathbf{A}})^T$.

Aufgabe 6: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Matrizen A und B orthognal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.

b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

Aufgabe 7: a) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die beiden Vektoren $x = (1,0,1)^T$, $y = (0,1,1)^T$.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\phi := \angle(x,y)$ zwischen x und y, definiert durch $\cos\phi := \frac{x \cdot y}{||x|| \ \ ||y||}$, gleich dem Winkel $\psi := \angle(Ax, Ay)$ zwischen Ax und Ay ist.

b) Eine 3×3 Matrix A heißt winkeltreu, falls A invertierbar ist und

$$\angle(Ax, Ay) = \angle(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix A der Form $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ winkeltreu ist.

c) Die Matrix A aus Aufgabenteil a) kann in der Form $A = \lambda Q$ geschrieben werden, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q \in O(3)$. Berechnen Sie diese λ und Q.
Tipp: Berechnen Sie $|\det A|$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Matrix A schreiben läßt als $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$.