Aufgabe 4: Betrachten Sie die folgenden Vektorfelder

$$\text{(i) } f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } h(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und die Gebiete

$$K = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$$

und

$$\Omega = \{(x,y) \mid -1 < x < 1 \text{ und } -1 < y < 1\}.$$

Skizzieren Sie die Vektorfelder (i) und (iii) für das Gebiet Ω und (ii) für das Gebiet K.
Wenden Sie den Gaußschen Integralsatz auf die Vektorfelder bzgl. des jeweiligen Gebiets an, berechnen Sie hierfür beide Seite des Integralsatzes und deuten Sie Ihre Ergebnisse.

LÖSUNG:Für ein Vektorfeld $w(x,y)$ und eine Gebiet G lautet der Gaußsche Integralsatz:

$$\int_G \operatorname{div} w(x,y)\, dxdy = \int_{\partial G} w(x,y) \cdot n(x,y)\, dl,$$

wobei n die äußere Normale an den Rand ∂G bezeichnet.

(i) Da es sich um ein konstantes Vektorfeld handelt, gilt:

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (0+0)\, dx\, dy = 0.$$

Zur Berechnung über den Rand zerlegen wir nun den Rand $\partial\Omega$ in 4 Teile, d.h. $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, wobei

$$\partial\Omega_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1+t \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\},$$
$$\partial\Omega_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\},$$
$$\partial\Omega_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1-t \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\},$$
$$\partial\Omega_4 = \left\{ \begin{pmatrix} -1+t \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\}.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f(x,y)\cdot n(x,y)\,dl &= \int_{\partial\Omega_1} f(x,y)\cdot n(x,y)\,dl + \int_{\partial\Omega_2} f(x,y)\cdot n(x,y)\,dl\\ &\quad+ \int_{\partial\Omega_3} f(x,y)\cdot n(x,y)\,dl + \int_{\partial\Omega_4} f(x,y)\cdot n(x,y)\,dl\\ &= \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot 1\,dt + \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot 1\,dt\\ &\quad+ \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\cdot 1\,dt + \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cdot 1\,dt\\ &= 1+1-1-1=0.\end{aligned}$$

(ii) Beim Gebiet K handelt es sich nun zunächst um den Einheitskreis. Das Vektorfeld $h(x,y)$ rotiert um den Urspung und es gilt

$$\int_K \operatorname{div} h(x,y)\,dxdy = \int_K (0+0)\,dx\,dy = 0.$$

Zur Berechnung über den Rand betrachten wir nun eine Parametisierung des Randes $\partial K = \gamma$, wobei $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$. Hierfür gilt $\gamma'(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}$, $\|\gamma'(t)\| = 1$ und $n(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} h(x,y)\cdot n(x,y)\,dl &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix} 1\,dt\\ &=0.\end{aligned}$$

(iii) Das Vektorfeld $g(x,y)$ „fließt“ vom Urspung weg in alle Richtungen gleich und trägt damit alles nach außen. Daher gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} g(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (1+1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 4\,dx\,dy = 8,$$

d.h. für das Gebiet hat das Vektorfeld eine positive Flussbilanz (es fließt mehr raus als ein). Zur Berechnung über den Rand benutzen wir nun wieder die Zerlung des Randes aus Teilaufgabe (i) und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl &= \int_{\partial\Omega_1} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl + \int_{\partial\Omega_2} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl\\ &\quad+ \int_{\partial\Omega_3} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl + \int_{\partial\Omega_4} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl\\ &= \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\-1+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot 1\,dt + \int_0^2 \begin{pmatrix}1-t\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot 1\,dt\\ &\quad+ \int_0^2 \begin{pmatrix}-1\\1-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\cdot 1\,dt + \int_0^2 \begin{pmatrix}-1+t\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cdot 1\,dt\\ &= \int_0^2 1+1+1+1\,dt = 8.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{B} = e^{t\mathbf{A}}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$. Welche Matrix erhalten Sie?

c) Zeigen Sie $\mathbf{B}^{-1} = e^{t\mathbf{A}^T} = (e^{t\mathbf{A}})^T$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}\,, \\
A^3 &= AA^2 = A \cdot (-\mathbb{1}) = -A\,, \\
A^4 &= AA^3 = A \cdot (-A) = -A^2 = \mathbb{1}\,, \\
A^5 &= AA^4 = A \cdot \mathbb{1} = A\,.
\end{aligned}$$

Ab hier wiederholt sich alles!

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A^k &= \begin{cases} A & \text{für} \quad k = 4l+1\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ -\mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+2\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ -A & \text{für} \quad k = 4l+3\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ \mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+4\,,\ l = 0,1,2,\ldots \end{cases} \\
\Rightarrow B &= e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \right) \mathbb{1} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) A \\
&= \cos t \cdot \mathbb{1} + \sin t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Demnach lässt sich die Matrix A schreiben als

$$\begin{aligned}
A &= C \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{At} &= C \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Man rechnet leicht nach, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = B^T .$$

c) Es gilt $B^{-1} = B^T$, also ist B orthogonal.

$$\Rightarrow B^{-1} = B^T = \left(e^{tA}\right)^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right)^T =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^T)^k}{k!} = e^{tA^T} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1} .$$

Aufgabe 6: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Matrizen A und B orthognal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.

b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

LÖSUNG:

a) Wir wollen zeigen, dass die Matrix AB orthogonal ist, d.h. $(AB)^T = (AB)^{-1}$.

$$\begin{aligned} (AB)^T AB &= B^T A^T AB \\ &\overset{A \text{ orthogonal}}{=} B^T \mathbb{1} B \\ &= B^T B \\ &\overset{B \text{ orthogonal}}{=} \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (AB)^T = (AB)^{-1}$$

b) Da die Matrix A orthogonal ist folgt, dass sie auch diagonalisierbar ist.

$$\Rightarrow \quad A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$

Die Determinante von A läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned} \det A &= \det Q^{-1} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \det Q \\ &= (\det Q)^{-1} \; \lambda_1 \cdots \lambda_n \; \det Q \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Eigenwerte λ_i einer orthogonalen Matrix gilt $|\lambda_i| = 1$.

$$\Rightarrow \quad |\det A| = 1$$

Aufgabe 7: a) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die beiden Vektoren $x = (1,0,1)^T$, $y = (0,1,1)^T$.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\phi := \angle(x,y)$ zwischen x und y, definiert durch $\cos\phi := \frac{x \cdot y}{||x|| \ \ ||y||}$, gleich dem Winkel $\psi := \angle(Ax, Ay)$ zwischen Ax und Ay ist.

b) Eine 3×3 Matrix A heißt winkeltreu, falls A invertierbar ist und

$$\angle(Ax, Ay) = \angle(x,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix A der Form $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ winkeltreu ist.

c) Die Matrix A aus Aufgabenteil a) kann in der Form $A = \lambda Q$ geschrieben werden, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q \in O(3)$. Berechnen Sie diese λ und Q.
Tipp: Berechnen Sie $|\det A|$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Matrix A schreiben läßt als $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{2} = \|y\|\,, \\
\cos\phi &= \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,. \\
Ax &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \|Ax\| = 2\,, \\
Ay &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \|Ay\| = 2\,, \\
\cos\psi &= \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \cos\phi\,. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b)

$$\angle(Ax, Ay) = \angle(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\,.$$

$A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ impliziert:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|Ax\| = \|\lambda Q x\| = |\lambda| \|Qx\| = |\lambda| \|x\|\,, \\
&\quad \|Ay\| = \|\lambda Q y\| = |\lambda| \|y\|\,, \\
&\quad Ax \cdot Ay = \lambda Qx \cdot \lambda Qy = \lambda^2 (Qx \cdot Qy) = \lambda^2 (x \cdot y)\,, \\
&\Rightarrow \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{\lambda^2 (x \cdot y)}{|\lambda|^2 \|x\| \cdot \|y\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\,, \ \text{da } \lambda^2 = |\lambda|^2\,.
\end{aligned}$$

Da $\lambda \neq 0$ ist A offensichtlich invertierbar. ($A^{-1} = \lambda^{-1} Q^T$)

c) Allgemein gilt: $A = \lambda Q$

$$\Rightarrow \det A \;=\; \det(\lambda Q) = \lambda^n \det Q$$

Wir wissen: $|\det Q| = 1$. Also folgt

$$\begin{aligned} |\det A| &= |\lambda|^n \\ \Leftrightarrow \quad |\det A|^{\frac{1}{n}} &= |\lambda| \end{aligned}$$

Hier in unserem Beispiel gilt: $\det A = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2} > 0$.

Behauptung: $\lambda = \sqrt{2} = 2^{1/2}$. Denn

$$(\det A)^{1/3} = \left(2^{3/2}\right)^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q \in O(3)\,!}.$$

Beachte: $\lambda = \sqrt{2} =$ Länge der Spaltenvektoren von A!

Im Allgemeinen muss man das Vorzeichen von λ prüfen. Hier ist das klar wegen $n = 3$!