Aufgabe 8: Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Aufgabe 9: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \\ C &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrix AB.

b) Berechnen Sie die Matrix BC.

c) Da A, B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

Aufgabe 10: Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Eigenwerte einer Drehmatrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

b) Die Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

c) Die Eigenwerte einer beliebigen orthogonalen Matrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

d) Die Determinante einer beliebigen orthogonalen Matrix ist ± 1.
ja ☐ nein ☐

e) Jede längentreue (d.h. orthogonale) lineare Abbildung ist auch winkeltreu.
ja ☐ nein ☐

f) Jede winkeltreue lineare Abbildung ist auch längentreu.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 11: Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, daß für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v \quad$ und $\quad S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12: Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen
Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. A ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von A, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja ☐ nein ☐

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja ☐ nein ☐

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja ☐ nein ☐

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja ☐ nein ☐

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann folgt $\lambda = 0$.
ja ☐ nein ☐

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja ☐ nein ☐

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja ☐ nein ☐