Aufgabe 8: Betrachten Sie die Spiegelungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Lösung: Um die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A zu berechnen, berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (\cos\alpha - \lambda)(-\cos\alpha - \lambda) - \sin^2\alpha \\
&= -\cos^2\alpha + \lambda\cos\alpha - \lambda\cos\alpha + \lambda^2 - \sin^2\alpha \\
&= \lambda^2 - \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\
&= \lambda^2 - 1
\end{aligned}$$

und bestimmen dessen Nullstellen

$$P_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

Die Eigenwerte der Spiegelungsmatrix A lauten also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$.
Nun berechnen wir die zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{aligned}
& & Ax &= \lambda_{1,2} x \\
\Leftrightarrow & & (A - \lambda_{1,2}\mathbb{1})\, x &= 0 \\
\Leftrightarrow & & \begin{pmatrix} \cos\alpha \pm 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow & & \left\{ \begin{aligned} (\cos\alpha \pm 1)\, x_1 + x_2 \sin\alpha &= 0 \\ x_1 &= \tfrac{\cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha} x_2 \end{aligned} \right. &
\end{aligned}$$

Setzt man x_1 ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
& (\cos\alpha \pm 1)\, x_1 + x_2 \sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\cos\alpha \pm 1)\, \tfrac{\cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha} x_2 + x_2 \sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha} x_2 + x_2 \sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -x_2 \sin\alpha + x_2 \sin\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 &= 0
\end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left\{ \beta \begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ \beta \begin{pmatrix} -\tan\frac{\alpha}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \beta \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\},
\end{aligned}$$

denn mit Hilfe der Additionstheoreme läßt sich zeigen

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= -\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\
&= -\tan\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left\{\beta\begin{pmatrix}\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}\\ 1\end{pmatrix}\,\middle|\,\beta\in\mathbb{R}\right\} &= \left\{\beta\begin{pmatrix}\cot\frac{\alpha}{2}\\ 1\end{pmatrix}\,\middle|\,\beta\in\mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\beta\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}\,\middle|\,\beta\in\mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

wobei man ebenfalls mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen kann, dass

$$\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}.$$

Aufgabe 9: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix},\quad \beta\in\mathbb{R}\\
C &= \begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ \sin\gamma & -\cos\gamma\end{pmatrix},\quad \gamma\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrix AB.

b) Berechnen Sie die Matrix BC.

c) Da A, B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos(-\gamma) - \sin\beta\sin(-\gamma) & -\cos\beta\sin(-\gamma) - \sin\beta\cos(-\gamma) \\ \sin\beta\cos(-\gamma) + \cos\beta\sin(-\gamma) & -\sin\beta\sin(-\gamma) + \cos\beta\cos(-\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\gamma) & -\sin(\beta-\gamma) \\ \sin(\beta-\gamma) & \cos(\beta-\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Bei der Matrix AB handelt es sich um eine Spiegelung und bei der Matrix BC handelt es sich um eine Drehung.

Aufgabe 10: Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Eigenwerte einer Drehmatrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

b) Die Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

c) Die Eigenwerte einer beliebigen orthogonalen Matrix sind stets ± 1.
ja ☐ nein ☐

d) Die Determinante einer beliebigen orthogonalen Matrix ist ± 1.
ja ☐ nein ☐

e) Jede längentreue (d.h. orthogonale) lineare Abbildung ist auch winkeltreu.
ja ☐ nein ☐

f) Jede winkeltreue lineare Abbildung ist auch längentreu.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein! In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenwerte einer Drehmatrix komplex sein können.

b) Ja! Siehe einleitendes Beispiel im Kapitel Diagonalisierung.
Alternativ: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Spiegelungsmatrix eine orthogonale Matrix ist. Zudem wissen wir, dass der Betrag der Eigenwerte einer orthogonalen Matrix jeweils 1 ist. Da die Spiegelungsmatrix zudem symmetrisch ist und nur reelle Einträge hat, kann sie nur reelle Eigenwerte haben. Somit müssen die Eigenwerte ± 1 sein.

c) Nein! Wie im Fall der Drehmatrix können die Eigenwerte auch komplex sein.

d) Ja! Siehe Vorlesung.

e) Ja! Siehe Vorlesung.

f) Nein! Die Matrix $A = 2\mathbb{1}$ ist zwar winkeltreu aber nicht längentreu.

Aufgabe 11: Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, daß für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v \quad \text{und} \quad S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} S_n u &= u - 2\frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n = u - \frac{2u \cdot (u-v)}{\|u-v\|^2} \cdot (u-v) \\ 2u \cdot (u-v) &= 2\|u\|^2 - 2u \cdot v\,. \\ \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 - 2u \cdot v \quad \text{wegen } \|u\| = \|v\|\,. \\ \Rightarrow\ S_n u &= u - (u-v) = u - u + v = v\,. \end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$S_n v = u\,,$$

wegen $2v \cdot n = 2v \cdot (u-v) = 2uv - 2\|v\|^2$ und $\|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2uv = \|u-v\|^2$.

b)

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \sqrt{1^2 + (-1)^2} &= |\alpha| \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} &= |\alpha| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Matrix S_{u-v} berechnen zu können, führen wir zuerst ein paar Nebenrechnungen durch:

$$u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u-v)(u-v)^T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{u-v} &= \mathbb{1} - 2\frac{(u-v)(u-v)^T}{\|u-v\|^2} \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
S_{u-v}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12: Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. A ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von A, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja ☐ nein ☐

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja ☐ nein ☐

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja ☐ nein ☐

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja ☐ nein ☐

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann folgt $\lambda = 0$.
ja ☐ nein ☐

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja ☐ nein ☐

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:Die Antworten lauten:

a) Ja, denn alle Diagonaleinträge von A sind Null.

b) Nein! Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Ja. Man berechnet für eine beliebige schiefsymmetrische 3×3-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = 0 + abc + (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) - 0 - 0 - 0 = 0.$$

d) Ja. $Ax \cdot x = x \cdot A^T x = x \cdot (-A)x = -x \cdot Ax = -Ax \cdot x \Rightarrow 2Ax \cdot x = 0$.

e) Ja. $Ax \cdot x = 0$ bedeutet, dass Ax stets senkrecht auf x steht. Also kann Ax kein Vielfaches von x sein, ausser das Nullfache.

Formal: Sei $Ax = \lambda x$ mit $x \neq 0$. Dann $0 = Ax \cdot x = \lambda x \cdot x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda = 0$.

f) Ja, siehe Vorlesung.

g) Ja. $\det(\exp(tA))$ ist stetig (differenzierbar) in t und kann für beliebige t nur die Werte 1 und -1 annehmen, da $\exp(tA)$ stets orthogonal ist. Da die Werte dazwischen nicht möglich sind, muss die (stetige) Funktion für alle t konstant sein. Da

$$\det(\exp(0A)) = \det(\exp(0)) = \det(\mathbb{1}) = 1,$$

muss auch gelten

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(1A)) = 1.$$