Aufgabe 13: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrizen mit Hilfe von Spiegelungen. Berechnen Sie dabei nur die Matrix R und die Matrizen $Q^{(k)}$. Die Matrizen $Q^{(k)}$ können sie entweder explizit oder in der Form $Q^{(k)} = \mathbb{1} - cvv^T$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ angeben.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Geben Sie den Rang der Matrizen A und B an.

d) Verwenden Sie die QR-Zerlegung, um die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = d$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Aufgabe 14: a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist.

b) Lösen Sie deshalb das Approximationsproblem

$$\|Ax - b\|^2 \to \min!$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung von A.

Aufgabe 15:

a) Schreiben Sie eine Matlab Funktion *QRSolve(A,b)*, die unter Verwendung der Funktion *QRDecomposition* aus der Vorlesung das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

b) Testen sie diese Funktion anhand der Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c) Erweitern Sie die Funktion *QRSolve* zu einer Funktion, die lineare Ausgleichsprobleme für nichtquadratische Matrizen A lösen kann.

d) Testen Sie diese Funktion anhand des Beispiels

$$\|Ax - b\|^2 \to \min$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 16: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} \mid f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v,w) = \int_0^\pi v(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot,\cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\right).$$