Aufgabe 17: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)u_i$.
ja ☐ nein ☐

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:Die Antworten lauten: a) Nein! Bsp. $v = e_3$, $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$, $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$ b) Ja! c) Ja! Ausmultiplizieren $u_i \cdot u_j = 0$. d) Nein! Siehe a) e) Ja! Wegen c) $v = w = u$, dann $Pv = Pw = u$.

Aufgabe 18: Thema: Normalengleichungssystem

Sei A eine $m \times n$ Matrix. Betrachten Sie das Normalengleichungssystem

$$A^T A x = A^T b$$

für $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig?

a) Für $b = 0$ hat das System stets nur die triviale Lösung.
ja ☐ nein ☐

b) Ax ist eindeutig bestimmt, auch wenn es mehrere Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.
ja ☐ nein ☐

c) Gilt Rang von A gleich n, dann ist $A^T A$ positiv definit.
ja ☐ nein ☐

d) Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist jede Lösung des Systems auch Lösung von $Ax = b$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:Die Antworten lauten:

a) Nein! Bsp. $A = 0$.

b) Ja! Seien x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $A^T Ax = A^T b$. Dann folgt daraus

$$\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\
\Rightarrow & (x_1 - x_2)A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \|A(x_1 - x_2)\|^2 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & A(x_1 - x_2) & = & 0 \\
\Leftrightarrow & Ax_1 & = & Ax_2
\end{array}$$

c) Ja! Rang von A gleich n, daraus folgt:

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\Rightarrow A^T Ax \cdot x = \|Ax\|^2 \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

Zudem wissen wir, dass die Matrix $A^T A$ positiv semidefinit ist und somit ist $A^T A$ positiv definit.

d) Nein! Beispiel: A sei die Nullmatrix.

Aufgabe 19: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

b) Berechnen Sie die ersten 4 Fourierkoeffizienten dieser Funktion, d.h. berechnen Sie

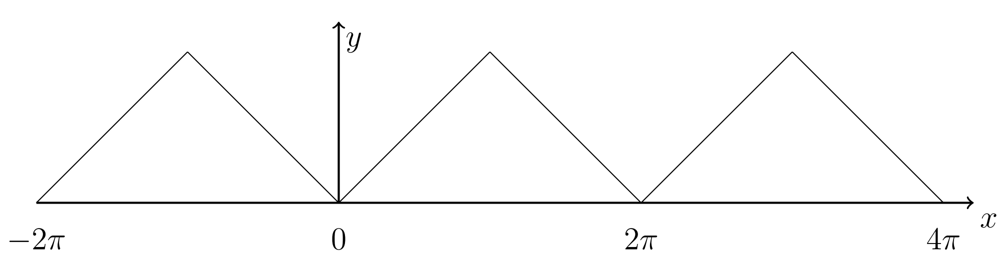
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und für $k = 1, \ldots, 4$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(k\pi)dx.$$

c) Argumentieren Sie, warum $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(k\pi)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

LÖSUNG:

a) 

b) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}xdx + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} 2 - \frac{1}{\pi}xdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}x^2\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\left[2x - \frac{1}{2\pi}x^2\right]_\pi^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\pi^2 - 0 + \frac{2}{\pi}2\pi - \frac{2}{\pi}\pi - \frac{1}{2\pi^2}(2\pi)^2 + \frac{1}{2\pi^2}(\pi)^2 = 1. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\cos(y)dy \\ =& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}(2 - \frac{1}{k\pi}y)\cos(y)dy \\ =& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\cos(y)dy + \frac{2}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}\cos(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2}\int_{k\pi}^{2k\pi} y\cos(y)dy \\ & \text{partielle Integration} \\ =& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y) + \cos(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[\sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[y\sin(y) + \cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\ =& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} - (0\cdot\sin(0) + \underbrace{\cos(0)}_{=1})\right] + \frac{2}{k\pi}\left[\underbrace{\sin(2k\pi) - \sin(k\pi)}_{=0}\right] \\ & - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[2k\pi\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - (k\pi\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k})\right] \\ =& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[1 - (-1)^k\right] = \frac{2}{k^2\pi^2}(-1 + (-1)^k). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{4}{\pi^2}, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= -\frac{4}{9\pi^2}, \\ a_4 &= 0. \end{aligned}$$

c) Argumentativ können wir analog zur Vorlesung feststellen:

i) wg. periodisch: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

ii) $f(-x) = f(x)$: gerade /symmetrisch zur y-Achse

iii) $\sin(-kx) = -\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

iv) $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin(kx)$: ungerade /punktsymmetrisch zum Ursprung

v) $\int_{-\pi}^{\pi}$ ungerade Funktion $dx = 0$

Alternativ können wir für $k \in \mathbb{Z}$ aber auch die b_k folgendermaßen berechnen

$$
\begin{aligned}
b_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \overset{y=kx}{=} \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} f(\frac{y}{k})\sin(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\sin(y)dy + \frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}(2-\frac{1}{k\pi}y)\sin(y)dy \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^{k\pi} y\sin(y)dy + \frac{2}{k\pi}\int_{k\pi}^{2k\pi}\sin(y)dy - \frac{1}{k^2\pi^2}\int_{k\pi}^{2k\pi} y\sin(y)dy \\
& \text{partielle Integration} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-y\cos(y)+\sin(y)\right]_0^{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[-\cos(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-y\cos(y)+\sin(y)\right]_{k\pi}^{2k\pi} \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-k\pi\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}+\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}-(0\cdot\cos(0)+\underbrace{\sin(0)}_{=0})\right] + \frac{2}{k\pi}\left[-\underbrace{\cos(2k\pi)}_{1}+\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}\right] \\
& - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-2k\pi\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}+\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}-(-k\pi\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}+\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0})\right] \\
=& \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-k\pi(-1)^k\right] - \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-2k\pi+k\pi(-1)^k\right] + \frac{2}{k\pi}\left[-1+(-1)^k\right] \\
=& \frac{1}{k\pi}\left[-(-1)^k+2-(-1)^k-2+2(-1)^k\right] = 0.
\end{aligned}
$$