Aufgabe 20: a) Zeigen Sie,

(i) $(z_n^j)^k = z_n^{j\cdot k}$,

(ii) $z_n^{j+l} = z_n^j \cdot z_n^l$,

(iii) $z_{2n}^{2j} = z_n^j$,

(iv) $z_n^j = z_n^{j+n}$,

(v) $z_{2n}^j = -z_{2n}^{j+n}$.

b) Zeichnen Sie z_4^j und z_8^j auf dem komplexen Einheitskreis. Interpretieren Sie die Relationen aus der ersten Teilaufgabe am komplexen Einheitskreis.

Aufgabe 21: a) Betrachten Sie die Koeffizienten c_k der Forier-Interpolation zu den Funktionswerten f_j,

$$nc_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j z_n^{-kj},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $f_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$.
Schreiben Sie für den Fall $n = 4$ die Formeln für $4c_0$, $4c_1$, $4c_2$ und $4c_3$ ohne Verwendung des Summenzeichens.

b) Betrachten Sie für $n = 2$ die zwei Interpolationsprobleme zu den Funktionswerten g_0, g_1 bzw. h_0, h_1, dann gilt für deren Koeffizienten

$$\begin{cases} 2d_0 = g_0 z_2^0 + g_1 z_2^0 \\ 2d_1 = g_0 z_2^0 + g_1 z_2^{-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} 2e_0 = h_0 z_2^0 + h_1 z_2^0 \\ 2e_1 = h_0 z_2^0 + h_1 z_2^{-1} \end{cases}.$$

Sei nun

$$\begin{aligned} g_0 &= f_0 + f_2, \\ g_1 &= f_1 + f_3, \\ h_0 &= (f_0 - f_2), \\ h_1 &= (f_1 - f_3) z_4^{-1}. \end{aligned}$$

Welchen Zusammenhang zwischen $4c_0$, $4c_2$, $4c_3$, $4c_4$ einerseits und $2d_0$, $2d_1$, $2e_0$, $2e_1$ andererseits stellen Sie fest?

c) Woher kennen Sie den Zusammenhang der Interpolationsprobleme?

Aufgabe 22: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0, \pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Koeffizienten zu einer Approximation dieser Funktion mittels Schneller Fouriertransformation (FFT) für

   (i) 4 Punkte und

   (ii) 8 Punkte.

b) Plotten Sie die Funktion f und die beiden Approximationen mittels eines geeigneten Programms (z.B. Matlab).