Aufgabe 20: a) Zeigen Sie,

(i) $(z_n^j)^k = z_n^{j \cdot k}$,

(ii) $z_n^{j+l} = z_n^j \cdot z_n^l$,

(iii) $z_{2n}^{2j} = z_n^j$,

(iv) $z_n^j = z_n^{j+n}$,

(v) $z_{2n}^j = -z_{2n}^{j+n}$.

b) Zeichnen Sie z_4^j und z_8^j auf dem komplexen Einheitskreis. Interpretieren Sie die Relationen aus der ersten Teilaufgabe am komplexen Einheitskreis.

LÖSUNG:

a) (i)

$$\left(z_n^j\right)^k = \left(\exp\left(i\frac{2\pi j}{n}\right)\right)^k = \exp\left(i\frac{2\pi j \cdot k}{n}\right) = z_n^{j \cdot k}.$$

(ii)

$$z_n^{j+l} = \exp\left(i\frac{2\pi(j+l)}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi j}{n}\right) \cdot \exp\left(i\frac{2\pi l}{n}\right) = z_n^j \cdot z_n^l.$$

(iii)

$$z_{2n}^{2j} = \exp\left(i\frac{2\pi(2j)}{2n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi j}{n}\right) = z_n^j.$$

Alternativ:

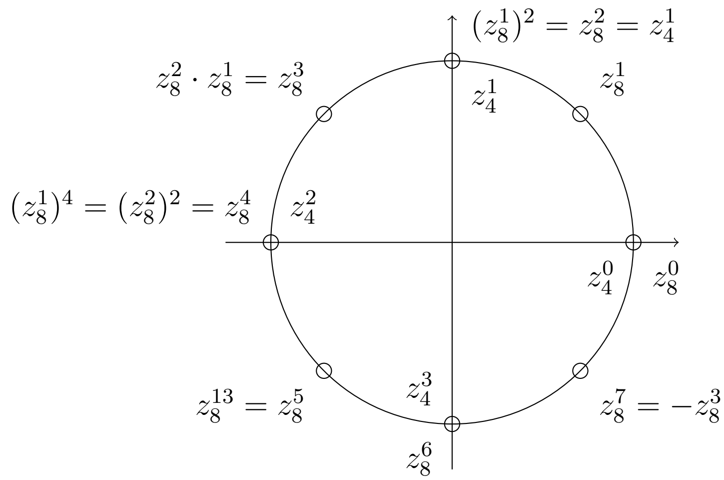
$$z_{2n}^{2j} = \cos\left(\frac{2\pi(2j)}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(2j)}{2n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = z_n^j.$$

(iv)

$$z_n^{j+n} = \exp\left(i\frac{2\pi(j+n)}{n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi j}{n}\right) \cdot \underbrace{\exp\left(i\frac{2\pi n}{n}\right)}_{=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1} = \exp\left(i\frac{2\pi j}{n}\right) = z_n^j.$$

(v)

$$z_{2n}^{j+n} = \exp\left(i\frac{2\pi(j+n)}{2n}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi j}{2n}\right) \cdot \underbrace{\exp\left(i\frac{2\pi n}{2n}\right)}_{=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1} = -\exp\left(i\frac{2\pi j}{n}\right) = -z_{2n}^j.$$



b)

Aufgabe 21: a) Betrachten Sie die Koeffizienten c_k der Forier-Interpolation zu den Funktionswerten f_j,

$$nc_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j z_n^{-kj},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $f_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 0, \dots, n-1$.
Schreiben Sie für den Fall $n = 4$ die Formeln für $4c_0$, $4c_1$, $4c_2$ und $4c_3$ ohne Verwendung des Summenzeichens.

b) Betrachten Sie für $n = 2$ die zwei Interpolationsprobleme zu den Funktionswerten g_0, g_1 bzw. h_0, h_1, dann gilt für deren Koeffizienten

$$\begin{cases} 2d_0 = g_0 z_2^0 + g_1 z_2^0 \\ 2d_1 = g_0 z_2^0 + g_1 z_2^{-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} 2e_0 = h_0 z_2^0 + h_1 z_2^0 \\ 2e_1 = h_0 z_2^0 + h_1 z_2^{-1} \end{cases}.$$

Sei nun

$$\begin{aligned} g_0 &= f_0 + f_2, \\ g_1 &= f_1 + f_3, \\ h_0 &= (f_0 - f_2), \\ h_1 &= (f_0 - f_2) z_4^{-1}. \end{aligned}$$

Welchen Zusammenhang zwischen $4c_0$, $4c_2$, $4c_3$, $4c_4$ einerseits und $2d_0$, $2d_1$, $2e_0$, $2e_1$ andererseits stellen Sie fest?

c) Woher kennen Sie den Zusammenhang der Interpolationsprobleme?

LÖSUNG:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
4c_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3, \\
4c_1 &= f_0 + f_1 z_4^{-1} + f_2 z_4^{-2} + f_3 z_4^{-3}, \\
4c_2 &= f_0 + f_1 z_4^{-2} + f_2 z_4^{-4} + f_3 z_4^{-6}, \\
4c_3 &= f_0 + f_1 z_4^{-3} + f_2 z_4^{-6} + f_3 z_4^{-9}.
\end{aligned}$$

b) Beginnen wir mit d_0:

$$\begin{aligned}
2d_0 &= g_0 z_2^0 + g_1 z_2^0 = (f_0 + f_2) z_2^0 + (f_1 + f_3) z_2^0 \\
&= f_0 z_2^0 + f_1 z_2^0 + f_2 z_2^0 + f_3 z_2^0 \\
&= f_0 z_4^0 + f_1 z_4^0 + f_2 z_4^0 + f_3 z_4^0 \\
&= 4c_0
\end{aligned}$$

Nun d_1:

$$\begin{aligned}
2d_1 &= g_0 z_2^0 + g_1 z_2^{-1} = (f_0 + f_2) z_2^0 + (f_1 + f_3) z_2^{-1} \\
&= f_0 z_2^0 + f_1 z_2^{-1} + f_2 \underbrace{z_2^0}_{= z_4^0 = z_4^{-4}} + f_3 \underbrace{z_2^{-1}}_{= z_4^{-2} = z_4^{-6}} \\
&= f_0 z_4^0 + f_1 z_4^{-2} + f_2 z_4^{-4} + f_3 z_4^{-6} \\
&= 4c_2
\end{aligned}$$

Dann e_0:

$$\begin{aligned}
2e_0 &= h_0 z_2^0 + h_1 z_2^{-1} = ((f_0 - f_2) z_4^0) z_2^0 + ((f_1 - f_3) z_4^{-1}) z_2^0 \\
&= f_0 + f_1 z_4^{-1} - f_2 z_4^0 - f_3 z_4^{-1} \\
&= f_0 z_4^0 + f_1 z_4^{-1} - f_2(-z_4^{-2}) - f_3(-z_4^{-3}) \\
&= f_0 z_4^0 + f_1 z_4^{-1} + f_2 z_4^{-2} + f_3 z_4^{-3} \\
&= 4c_1
\end{aligned}$$

Zum Schluss e_1:

$$\begin{aligned}
2e_1 &= h_0 z_2^0 + h_1 z_2^{-1} = ((f_0 - f_2) z_4^0) z_2^0 + ((f_1 - f_3) z_4^{-1}) z_2^{-1} \\
&= f_0 + f_1 z_4^{-1} z_2^{-1} - f_2 z_4^0 - f_3 z_4^{-1} z_2^{-1} \\
&= f_0 z_4^0 + f_1 z_4^{-1} z_4^{-2} - f_2 z_4^0 - f_3 z_4^{-1} z_4^{-2} \\
&= f_0 z_4^0 + f_1 z_4^{-3} - f_2(-z_4^{-6}) - f_3(-z_4^{-9}) \\
&= f_0 z_4^0 + f_1 z_4^{-3} + f_2 z_4^{-6} + f_3 z_4^{-9} \\
&= 4c_3
\end{aligned}$$

c) Dies ist ein Schritt in der Fast Fouriertransformation (FFT, Schnelle Fouriertransformation).

Aufgabe 22: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x, & x \in [0,\pi), \\ 2 - \frac{1}{\pi}x, & x \in [\pi, 2\pi), \\ f(x - 2k\pi), & x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Koeffizienten zu einer Approximation dieser Funktion mittels Schneller Fouriertransformation (FFT) für

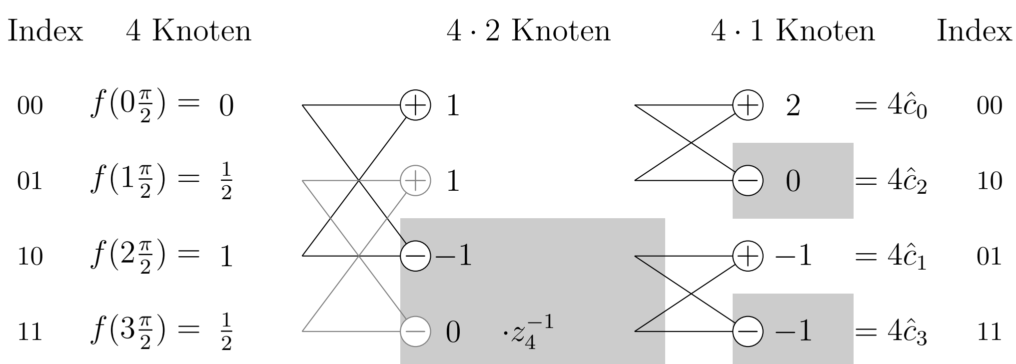
(i) 4 Punkte und

(ii) 8 Punkte.

b) Plotten Sie die Funktion f und die beiden Approximationen mittels eines geeigneten Programms (z.B. Matlab).

LÖSUNG:

a) (i) Wir notieren die Rechnung in Tabellenschreibweise:



Dann gilt

$$\hat{a}_0 = 2 \cdot \hat{c}_0 = 1$$

$$\hat{a}_1 = \hat{c}_1 + \hat{c}_3 = -\frac{1}{2}$$

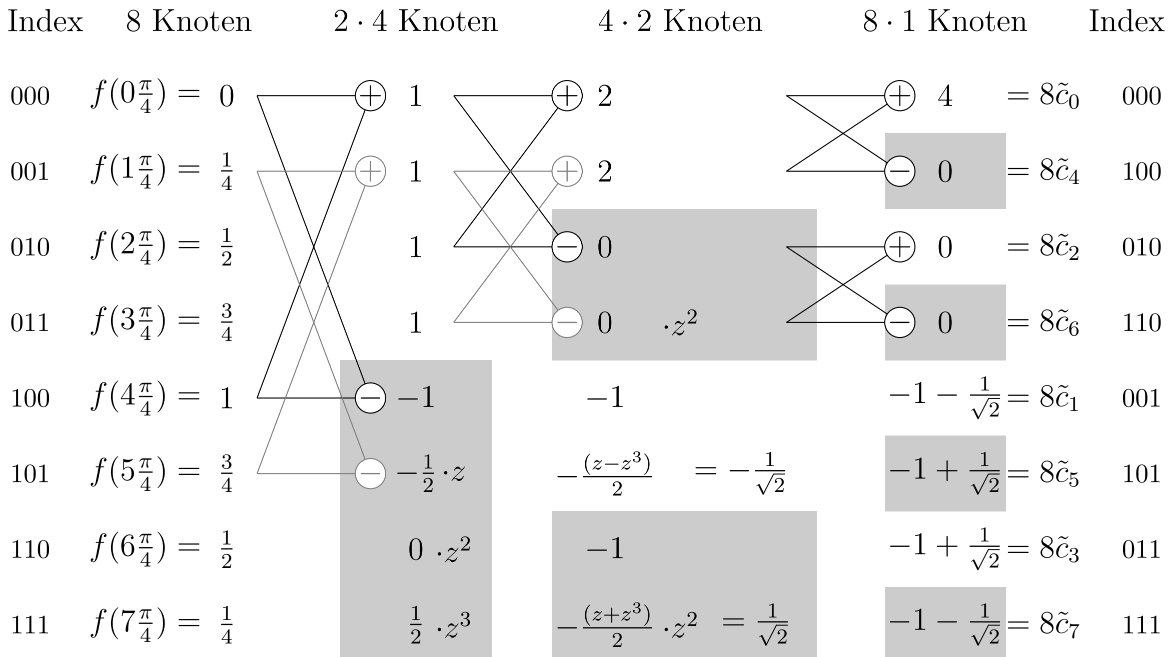
$$\hat{a}_2 = \hat{c}_2 = 0$$

$$\hat{b}_1 = i(\hat{c}_1 - \hat{c}_3) = 0$$

und somit

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x).$$

(ii) Wir notieren die Rechnung in Tabellenschreibweise:



Hierbei haben wir benutzt

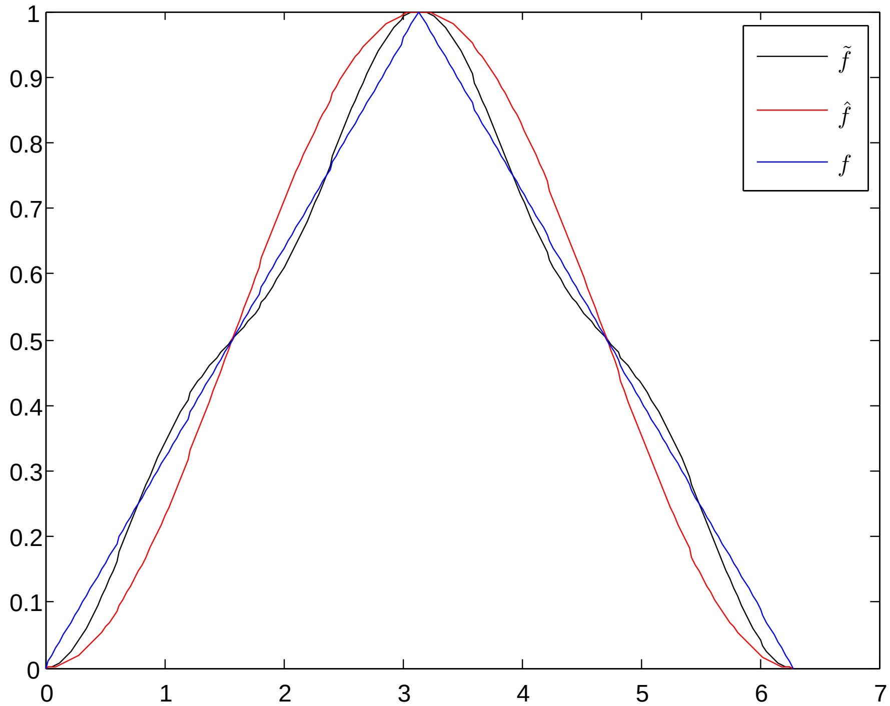
$$
\begin{aligned}
z = z_8^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \\
z^2 &= -i, \\
z^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \\
z^2 - z^3 &= \sqrt{2}, \\
z^2 + z^3 &= -\sqrt{2}i, \\
(z^2 + z^3)z^2 &= -\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= 2 \cdot \tilde{c}_0 = 1 \\
\tilde{a}_1 &= \tilde{c}_1 + \tilde{c}_7 = \frac{-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{4} \\
\tilde{a}_2 &= \tilde{c}_2 + \tilde{c}_6 = 0 \\
\tilde{a}_3 &= \tilde{c}_3 + \tilde{c}_5 = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\tilde{a}_4 &= \tilde{c}_4 = 0 \\
\tilde{b}_1 &= i(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_7) = 0 \\
\tilde{b}_2 &= i(\tilde{c}_2 + \tilde{c}_6) = 0 \\
\tilde{b}_3 &= i(\tilde{c}_3 + \tilde{c}_5) = 0
\end{aligned}
$$

und somit

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + (\frac{-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{4}) \cos(x) + (\frac{-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{4}) \cos(3x).$$



b)