

Aufgabe 23: Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$z(x, y) = xy \quad \text{und} \quad w(u, v) = u^2 - v^2.$$

- a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien der beiden Funktionen, also einige der Mengen $N_{\{z=c\}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x, y) = xy = c = \text{const}\}$ bzw. $N_{\{w=c\}} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid w(u, v) = u^2 - v^2 = c = \text{const}\}$, zum Beispiel für $c = 1, 10, 100$.
- b) Mit welchen Transformationen bildet man Niveaulinien von w auf Niveaulinien von z ab und umgekehrt?
- c) Welche 2×2 -Matrix \mathbf{A} erfüllt folgende Bedingungen:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- d) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$ der Parametrisierungen

$$(x, y) \mapsto \mathbf{f}(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{g}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

- e) Bestätigen Sie mit der Kettenregel die Beziehungen

$$\begin{aligned} D(\mathbf{g} \circ \mathbf{A})(x, y) &= D\mathbf{g}(u, v) \cdot \mathbf{A} & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ D(\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1})(u, v) &= D\mathbf{f}(x, y) \cdot \mathbf{A}^{-1} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 24: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 25: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f .

Aufgabe 26: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_{\alpha}(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.