

Aufgabe 23: Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$z(x, y) = xy \quad \text{und} \quad w(u, v) = u^2 - v^2.$$

- a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien der beiden Funktionen, also einige der Mengen $N_{\{z=c\}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x, y) = xy = c = \text{const}\}$ bzw. $N_{\{w=c\}} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid w(u, v) = u^2 - v^2 = c = \text{const}\}$, zum Beispiel für $c = 1, 10, 100$.
- b) Mit welchen Transformationen bildet man Niveaulinien von w auf Niveaulinien von z ab und umgekehrt?
- c) Welche 2×2 -Matrix \mathbf{A} erfüllt folgende Bedingungen:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- d) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$ der Parametrisierungen

$$(x, y) \mapsto \mathbf{f}(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{g}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

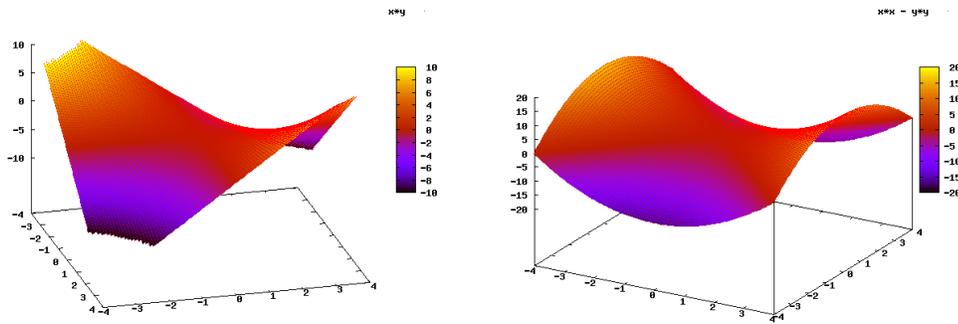
- e) Bestätigen Sie mit der Kettenregel die Beziehungen

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{A})(x, y) = D\mathbf{g}(u, v) \cdot \mathbf{A} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1})(u, v) = D\mathbf{f}(x, y) \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

- a) $N_{\{z=c\}}$ sind Hyperbeln der Form $y = \frac{c}{x}$. $N_{\{w=c\}}$ sind Kurven der Form $v = \sqrt{u^2 - c}$.

Die Graphen der beiden Funktionen sehen wie folgt aus:



b) Die Niveaulinien gehen auseinander hervor, indem man

$$\begin{aligned}
 x &= u + v \\
 y &= u - v \\
 \Rightarrow xy &= (u + v)(u - v) = u^2 - v^2
 \end{aligned}$$

ausdrückt. Das entspricht

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2}(x + y) \\
 v &= \frac{1}{2}(x - y)
 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

und somit entspricht \mathbf{A} einer Spiegelung an der y -Achse (die jedoch die Niveaulinien von w unverändert lässt) gefolgt von einer Rotation um 45 Grad gefolgt von einer Skalierung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dass die Niveaulinien auf diese Weise auseinander hervorgehen, sieht man, indem man betrachtet, wie die Graphen auseinander hervorgehen:

c)

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

d)

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$
$$Dg(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

e)

$$\begin{aligned} Dg(u, v) \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2(u-v) & 2(u+v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ u-v & u+v \end{pmatrix}, \\ (g \circ A)(x, y) &= g \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x-y) \\ \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x-y) \\ xy \end{pmatrix} \\ \Rightarrow D(g \circ A)(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ u-v & u+v \end{pmatrix}, \text{ denn} \\ u+v &= \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = x, \\ u-v &= \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = y. \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ Df(x, y) \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y+x & y-x \end{pmatrix}, \\ D(f \circ A^{-1})(u, v) &= D \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y+x & y-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 24: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

LÖSUNG: Gesucht wird der kritische Punkt der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$.

a) Notwendige Bedingung: $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 6x - 5y, \\ f_y(x, y) &= -5x - 4y. \end{aligned}$$

Dies liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem vom Rang 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = -24 - 25 = -49 \neq 0.$$

\Rightarrow Der einzige kritische Punkt liegt bei: $x = y = 0$ und lässt sich leicht mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder der inversen Matrix berechnen.

- b) Zur weiteren Untersuchung des kritischen Punktes betrachtet man die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von \mathbf{A} : Die charakteristische Gleichung von \mathbf{A} lautet

$$\begin{aligned} (6 - \lambda)(-4 - \lambda) - 25 &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 49, \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 &= 50 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{50}. \end{aligned}$$

Es gilt deshalb: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2} > 0$ bzw. $\lambda_2 = 1 - \sqrt{50} = 1 - 5\sqrt{2} < 0$ und, da die Eigenwerte verschiedenen Vorzeichen haben, liegt in $(0, 0)$ ein Sattelpunkt mit dem Wert $f(0, 0) = 3$ vor.

Man kann dies auch wie folgt einsehen: Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0, 0)$ ist indefinit, denn es gilt ja

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

und

$$D^2 f(0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 > 0,$$

sowie

$$D^2 f(0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0.$$

Also liegt ein Sattelpunkt vor, für den gilt

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 3, \\ f(t, 0) &= 3t^2 + 3 > 3, \\ f(0, t) &= -2t^2 + 3 < 3, \end{aligned}$$

wobei $t \neq 0$ sei.

Aufgabe 25: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f .

LÖSUNG: Kritische Punkte von f sind diejenigen Punkte (x, y) mit $\nabla f(x, y) = 0$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cos(y) \\ -\sin(x) \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}, \text{ oder } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ oder } y = \frac{\pi}{2}, \text{ oder } y = \frac{3\pi}{2} \\ x = 0, \text{ oder } x = \pi, \text{ oder } y = 0, \text{ oder } y = \pi \end{cases}$$

Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cos(y) & -\cos(x) \sin(y) \\ -\cos(x) \sin(y) & -\sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_1 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_2 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_3 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit, d.h. } A_4 \text{ ist ein Maximum}$$

$$D^2 f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_5 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_6 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_7 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_8 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Aufgabe 26: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} \text{grad} f_\alpha(x, y) &= \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -x^2 \\ \alpha x = y^2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha y = -\frac{y^4}{\alpha^2} \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^4 + \alpha^3 y = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y(y^3 + \alpha^3) = 0 \\ x = \frac{y^2}{\alpha} \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (y = 0 \text{ und } x = 0) \text{ oder } (y = -\alpha \text{ und } x = \alpha) \\ P_0 = (0, 0), P_1 = (\alpha, -\alpha) : D^2 f_\alpha(x, y) &= \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $P_0 = (0, 0)$ gilt $D^2 f_\alpha(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(0, 0)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 9\alpha^2 = 0 &\Leftrightarrow (\lambda + 3\alpha)(\lambda - 3\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = -3\alpha, \quad \lambda_2 = 3\alpha \end{aligned}$$

\Rightarrow Für $\alpha \neq 0$ gilt: $\lambda_1 \lambda_2 = -9\alpha^2 < 0$

D.h. λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen, also ist $D^2 f_\alpha(0, 0)$ indefinit und $(0, 0)$ ein Sattelpunkt.

Im Fall $\alpha = 0$ reicht die Hessematrix nicht aus, um eine Aussage machen zu können, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt. Dazu benötigt man Ableitungen höherer Ordnung.

Für $P_1 = (\alpha, -\alpha)$ gilt $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}$.

Eigenwerte von $D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$: charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} (6\alpha - \lambda)^2 - 9\alpha^2 = 0 &\Leftrightarrow 6\alpha - \lambda = \pm\sqrt{9\alpha^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = 3\alpha, \quad \lambda_2 = 9\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow D^2 f_\alpha(\alpha, -\alpha)$ ist positiv definit für $\alpha > 0$ und negativ definit für $\alpha < 0$.
D.h. $(\alpha, -\alpha)$ liefert $f_\alpha(\alpha, -\alpha) = \alpha^3 + \alpha^3 - 3\alpha^3 = -\alpha^3$ und ergibt ein (lokales) Minimum für $\alpha > 0$ und ein (lokales) Maximum für $\alpha < 0$. (Für $\alpha = 0$ siehe oben.)

b)

$$\begin{aligned} \text{grad}f(x, y) &= \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 3y^2 - 12 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \\ \Rightarrow P_0 = (-1, -2), P_1 = (-1, 2), P_2(1, -2), P_3(1, 2) \\ D^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- i) Für $P_0 = (-1, -2)$ gilt: $D^2 f(-1, -2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.
 $f(-1, -2) = -1 - 8 + 3 + 24 + 20 = 38 \Rightarrow$ (lokales) Maximum.
- ii) Für $P_1 = (-1, 2)$ gilt: $D^2 f(-1, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist indefinit.
 $f(-1, 2) = -1 + 8 + 3 - 24 + 20 = 6 \Rightarrow$ Sattelpunkt.
Für $P_2 = (1, -2)$ gilt: $D^2 f(1, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist indefinit,
 $f(1, -2) = 1 - 8 - 3 + 24 + 20 = 34$
 \Rightarrow Sattelpunkt.
- iii) Für $P_3 = (1, 2)$ gilt: $D^2 f(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.
 $f(1, 2) = 1 + 8 - 3 - 24 + 20 = 2$
 \Rightarrow (lokales) Minimum.