

**Aufgabe 27:** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie  $x_Z \in Z$ , so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle  $x \in Z$ .

- a) Stellen Sie  $x_0$  und ein beliebiges  $x \in Z$  in Zylinderkoordinaten dar.
- b) Geben Sie den Abstand  $\|x_0 - x\|^2$  als Funktion  $d(\varphi, z)$  an.
- c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion  $d(\varphi, z)$ .
- d) Berechnen Sie die Hessematrix von  $d(\varphi, z)$ .
- e) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion  $d(\varphi, z)$ .

**Aufgabe 28:** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2.$$

a) Schreiben Sie  $f$  in der Form

$$f(x, y) = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ .

b) Berechnen und plotten bzw. skizzieren Sie die 1-Niveaulinie von  $f$ , d.h.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 1\}.$$

c) Berechnen Sie die exakte Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y).$$

d) Führen Sie 4 Schritte des Gradientenverfahrens für den Startwert  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  durch. Benutzen Sie hierfür einen Taschenrechner, Matlab etc.

e) Führen Sie 4 Schritte des Gradientenverfahrens für den Startwert  $\tilde{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  durch. Benutzen Sie hierfür einen Taschenrechner, Matlab etc.

f) Plotten bzw. skizzieren Sie die 2- und 7-Niveaulinie.

g) Fügen Sie nun die Iterationsschritte der Gradientenverfahren und deren Abstiegsrichtungen zu Ihren Skizzen hinzu. Welches typische Verhalten stellen Sie fest?

**Aufgabe 29:** a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  mit Restglied  $O(|x - x_0|^{2n})$ .

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto g(x, y) = \cos(x) \cos(y)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  mit Restglied der Ordnung 3.

**Aufgabe 30:** Sei  $a \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = \|x - a\|$  nach Taylor an der Stelle  $x_0$  bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.