Aufgabe 31: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$h(x,y,z) := (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\,,$$
$$g(x,y,z) := x - 1 = 0\,,$$
$$\mathbf{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 32: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(x,y,z) \neq 0$.

a) Bestimmen Sie für die durch $f(x,y,z) = 0$ gegebene Fläche die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) mit

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0,$$

indem Sie die Fläche als Graph einer Funktion über der xy-Ebene darstellen und den Tangentialraum an die Graphenfläche in Normalenform berechnen (Tipp: Ohne Normierung der Normalen ist die Rechnung einfacher). Verwenden Sie den Satz über impliziten Funktionen, um die auftretenden partiellen Ableitungen dieser unbekannten Funktion durch partielle Ableitungen von f auszudrücken.

b) Was ergibt sich für das Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$?

Aufgabe 33: a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$U(x) = U(x,y,z) := \frac{mG}{||x-a||} = \frac{mG}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}}$$

eines Punktes $a \in \mathbb{R}^3$ der Masse $m > 0$. Die positive Konstante G mit dem Wert $G = (6672 \pm 4)10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$\mathcal{F}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : U(x) = c\}$$

von U für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^3$ $(a \neq b)$ der Massen $m_1 = m_2 = m > 0$ lautet

$$V(x) = V(x,y,z) := \frac{m_1 G}{||x-a||} + \frac{m_2 G}{||x-b||}$$

Sind die Niveauflächen $\mathcal{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = c\}$ von V wiederum für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen?

Aufgabe 34: Betrachten Sie die Parametrisierung

$$\Psi : (\theta, \phi) \mapsto ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta) \in \mathbb{R}^3$$

einer Fläche T, wobei $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$.

a) Skizzieren Sie die Fläche T. Betrachten Sie hierfür $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ fest und skizzieren Sie die Kurven in Abhängigkeit von ϕ. Machen Sie das gleiche für $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ und θ frei. Um welche Fläche handelt es sich?

b) Berechen Sie den Flächeninhalt von T.