Aufgabe 31: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &:= (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\,, \\ g(x,y,z) &:= x - 1 = 0\,, \\ \mathbf{f}(x,y,z) &:= \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:

a) $h(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ beschreibt eine Kugel $B_R(M) \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $R = 2$ ($R^2 = 4\,!$) und Mittelpunkt $M = (2,0,0)^T$.

$g(x,y,z) = x - 1 = 0$ beschreibt die Ebene $x = 1$, die parallel zur y-z-Ebene ist und den Abstand 1 von dieser Ebene hat.

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Schnittmenge beider Figuren:

Die Schnittmenge ist ein Kreis in der Ebene $x = 1$:

$$\begin{aligned} 0 = h(1,y,z) &= (1-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ &= 1 - 4 + y^2 + z^2 \\ &= y^2 + z^2 - 3 \\ \Leftrightarrow\ y^2 + z^2 &= 3\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis vom Radius $\tilde{R} = \sqrt{3}$ mit Mittelpunkt $\tilde{M} = (1,0,0)^T$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Offensichtlich gilt:

$$z^2 = 3 - y^2 \ \Rightarrow\ z = z(y) = \pm\sqrt{3 - y^2} \quad \text{für } |y| \le \sqrt{3}$$
$$\text{(sowie } x(y) = 1\text{)}$$

Entsprechend:

$$y^2 = 3 - z^2 \ \Rightarrow\ y = y(z) = \pm\sqrt{3 - z^2} \quad \text{für } |z| \le \sqrt{3}\,.$$
$$\text{(sowie } x(z) = 1\text{)}$$

Beachte: Wegen der $\pm$ erhalten wir in der Tat 4 Funktionen und damit die gesuchten 4 Stücke!

Genauer gilt: Die Schnittmenge wird parametrisiert durch folgende 4 Stücke als Graph jeweils einer Funktion von einer (geeigneten) Variablen:

$$\gamma_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_3(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_3(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,,$$

$$\gamma_4(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -\sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_4(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}\,.$$

Aufgabe 32: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(x,y,z) \neq 0$.

a) Bestimmen Sie für die durch $f(x,y,z) = 0$ gegebene Fläche die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) mit

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0,$$

indem Sie die Fläche als Graph einer Funktion über der xy-Ebene darstellen und den Tangentialraum an die Graphenfläche in Normalenform berechnen (Tipp: Ohne Normierung der Normalen ist die Rechnung einfacher). Verwenden Sie den Satz über impliziten Funktionen, um die auftretenden partiellen Ableitungen dieser unbekannten Funktion durch partielle Ableitungen von f auszudrücken.

b) Was ergibt sich für das Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$?

Lösung:

a) Nach Voraussetzung gilt:

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0 \text{ und } \partial_z f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

daher kann lokal (d. h. in einer geeigneten Umgebung des Punktes (x_0, y_0, z_0)) $z = g(x, y)$ geschrieben werden und die durch „$f(x, y, z) = 0$“ definierte Fläche wird lokal als Graph der Funktion $z = g(x, y)$ gegeben. Wir suchen also die Tangentialebene an den Graphen

$$G_g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$T_{(x,y,g(x,y))}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x,y) \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x_0,y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x g(x_0,y_0) \\ -\partial_y g(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht also senkrecht auf der Tangentialebene an den Graphen G_g im Punkt (x_0, y_0, z_0). Daraus folgt

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\partial_x g(x_0,y_0)\, x - \partial_y g(x_0,y_0)\, y + z = d \right\},$$

wobei d noch zu bestimmen ist. Da der Punkt (x_0, y_0, z_0) auf der Tangentialeben liegt, gilt

$$d = -\partial_x g(x_0,y_0)\, x_0 - \partial_y g(x_0,y_0)\, y_0 + z_0.$$

$$\Rightarrow T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z - z_0 = \partial_x g(x_0,y_0)\,(x - x_0) + \partial_y g(x_0,y_0)\,(y - y_0) \right\}$$

Aus $0 = f(x, y, g(x, y))$ folgt nach der Kettenregel (und dem Satz über implizite Funktionen):

$$\partial_x g(x_0,y_0) = -\frac{\partial_x f(x_0,y_0,z_0)}{\partial_z f(x_0,y_0,z_0)} \quad \text{und} \quad \partial_y g(x_0,y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0,y_0,z_0)}{\partial_z f(x_0,y_0,z_0)}$$

Setzt man dies ein und multipliziert mit $\partial_z f(x_0, y_0, z_0)$ (was nach Vorausetzung $\neq 0$!), ergibt sich

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0,y_0,z_0) \\ \partial_y f(x_0,y_0,z_0) \\ \partial_z f(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Bemerkung:

Im Graphenfall wird die Tangentialebene an den Graphen meinst wie oben angegeben definiert, doch es gibt auch Definitionen ohne Aufpunkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}$.

In diesem Fall gilt $d = 0$, so dass der Abschnitt zur Berechnung von d wegfällt und sich folgende Lösung ergibt:

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0,y_0,z_0) \\ \partial_y f(x_0,y_0,z_0) \\ \partial_z f(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

b) Wir setzen natürlich $a, b, c > 0$ voraus.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,, \\ f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \quad \checkmark\,, \\ \nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)\,, \\ \nabla f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{b}\left(y - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}b}\left(y - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}c}\left(z - \frac{c}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a}x + \frac{1}{\sqrt{3}b}y + \frac{1}{\sqrt{3}c}z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3} \right\}$$

ist damit die Tangentialebene im Punkt $\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$ an das Ellipsoid.

Bemerkung:
Analog zum vorherigen Aufgabenteil gibt es auch hier eine zweite Mögliche Lösung. Diese lautet

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Aufgabe 33: a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$U(x) = U(x, y, z) := \frac{mG}{||x - a||} = \frac{mG}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2}}$$

eines Punktes $a \in \mathbb{R}^3$ der Masse $m > 0$. Die positive Konstante G mit dem Wert $G = (6672 \pm 4)10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$\mathcal{F}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : U(x) = c\}$$

von U für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^3$ $(a \neq b)$ der Massen $m_1 = m_2 = m > 0$ lautet

$$V(x) = V(x, y, z) := \frac{m_1 G}{||x - a||} + \frac{m_2 G}{||x - b||}$$

Sind die Niveauflächen $\mathcal{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = c\}$ von V wiederum für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen?

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} U(x) = c \Leftrightarrow \|x - a\| &= \frac{mG}{c} =: R \\ \Leftrightarrow \|x - a\|^2 &= R^2 \end{aligned}$$

Dies sind Kugeloberflächen vom Radius $R = \frac{mG}{c} > 0$ und Mittelpunkt $M = a \in \mathbb{R}^3$.

Wegen

$$\nabla U(x) = -mG \frac{x - a}{\|x - a\|^3} \text{ für } x \neq a$$

gilt $\nabla U(x) \neq 0$ für alle $c > 0$. Der Satz über implizite Funktionen besagt daher, dass es sich bei $\mathcal{F}_c$ um eine zweidimensionale Flächen handelt.

Bemerkung: Der Satz über implizite Funktionen wäre/ist hier nicht absolut nötig, da man die Auflösungen explizit (s. oben) vornehmen kann und damit auch explizit Tangentialvektoren ausrechnen kann!

b) Zuerst zeigen wir, daß diese Menge nicht leer ist. Da $m_1 = m_2 = m$ gilt

$$V(x) = mG \left(\frac{1}{\|x - a\|} + \frac{1}{\|x - b\|} \right)$$

und

$$\begin{aligned} V(x) &\to 0 \text{ für } \|x\| \to \infty \\ V(x) &\to +\infty \text{ für } x \to a, b. \end{aligned}$$

Also gibt es für alle $c > 0$ Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, die in der Niveaumenge

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid V(x) = c\}$$

liegen. Sei

$$\begin{aligned} g(x) &:= \frac{m_1 G}{\|x-a\|} + \frac{m_2 G}{\|x-b\|} - c \\ &= mG\left(\frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}\right) - c \end{aligned}$$

die Funktion, die die Niveaumenge $V(x) = c$ als Null-Niveaumenge beschreibt.

$$\nabla g(x) = -mG\left(\frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} + \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3}\right)$$

Die Niveaumenge ist keine Fläche, falls

$$\begin{aligned} &\nabla g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &-\frac{(x-a)}{\|x-a\|^3} - \frac{(x-b)}{\|x-b\|^3} = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{a-x}{\|x-a\|^3} = \frac{x-b}{\|x-b\|^3} \end{aligned}$$

Da zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in Länge und Richtung übereinstimmen, gilt

$$\begin{aligned} &\nabla g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &a - x = x - b \\ \Leftrightarrow &x = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Solche Punkte gehören zu der Niveauflächen $V(x) = c_0$ wobei

$$c_0 = \frac{mG}{\|\frac{b-a}{2}\|} + \frac{mG}{\|\frac{a-b}{2}\|} = \frac{4mG}{\|a-b\|}$$

Somit sind alle Niveaumengen

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid V(x) = c\}$$

mit $c \neq c_0$ Flächen. F_{c_0} ist hingegen keine Fläche.

<u>Bemerkung:</u>
Aus den Vorüberlegungen zu Beginn dieses Aufgabenteiles, weil ∇g nur an einer Stelle Null ist, und weil die Niveaumengen sich nicht schneiden, kann man sagen, dass:

- Für $c < c_0$ ist die Niveaumenge $V(x) = c$ ist eine Hyperfäche in $\mathbb{R}^3$, das heißt eine geschlossene 2D Fläche;
- Für $c = c_0$ hat die Niveaumenge $V(x) = c$ einen singulären Punkt (Siehe Abbildung 1)
- Für $c > c_0$ besteht die Niveaumenge $V(x) = c$ aus zwei Hyperfächen in $\mathbb{R}^3$, das heißt zwei geschlossene 2D Flächen.

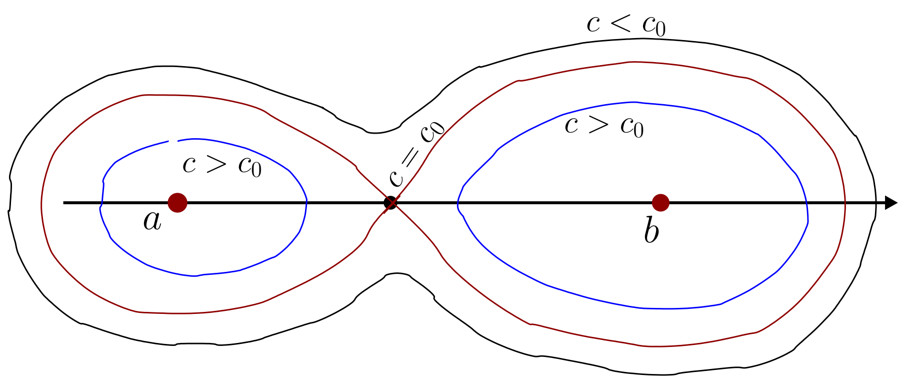


Abbildung 1: Skizze der Niveaufächen in 2D

Aufgabe 34: Betrachten Sie die Parametrisierung

$$\Psi : (\theta, \phi) \mapsto ((2 + \cos\theta)\cos\phi, (2 + \cos\theta)\sin\phi, \sin\theta) \in \mathbb{R}^3$$

einer Fläche T, wobei $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$.

a) Skizzieren Sie die Fläche T. Betrachten Sie hierfür $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ fest und skizzieren Sie die Kurven in Abhängigkeit von ϕ. Machen Sie das gleiche für $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ und θ frei. Um welche Fläche handelt es sich?

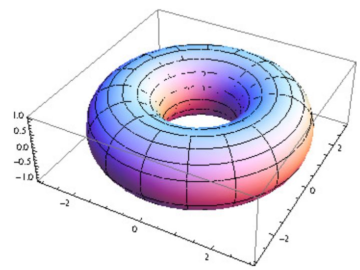
b) Berechen Sie den Flächeninhalt von T.

Lösung:

a) Für θ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Psi(0, \phi) &= (3\cos\phi, 3\sin\phi, 0) \\ \Psi\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) &= (2\cos\phi, 2\sin\phi, 1) \\ \Psi(\pi, \phi) &= (\cos\phi, \sin\phi, 0) \\ \Psi\left(\frac{3\pi}{2}, \phi\right) &= (2\cos\phi, 2\sin\phi, -1) \end{aligned}$$

Hier handelt es sich also um Kreise in der x-y-Ebene mit Radius 3, 2, 1 und 2,



welche in der z-Richtung verschoben sind. Für ϕ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\theta, 0\right) &= ((2+\cos\theta), 0, \sin\theta) \\
\Psi\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) &= (0, (2+\cos\theta), \sin\theta) \\
\Psi\left(\theta, \pi\right) &= (-(2+\cos\theta), 0, \sin\theta) \\
\Psi\left(\theta, \frac{3\pi}{2}\right) &= (0, -(2+\cos\theta), \sin\theta)
\end{aligned}$$

Hier handelt es sich also um Kreise in der x-z-Ebene bzw. in der y-z-Ebene mit Radius 1, welche in der jeweiligen x bzw. y-Richtung verschoben sind. Verbinden wir nun diese, so erhalten wir den Torus (Schwimmreife, Donut) mit äusserem Radius 2 und innerem Radius 1.

b) Die Parametrisierung ist

$$\Psi(\theta, \phi) = ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta)\,.$$

Damit ergibt sich

$$D\Psi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi & -(2+\cos\theta)\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & (2+\cos\theta)\cos\phi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D^T\Psi(\theta,\phi)D\Psi(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & (2+\cos\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos\theta)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{Flächeninhalt}(T) &= \int_T da = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\det D^T\Psi(\theta,\phi)D\Psi(\theta,\phi)\| d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2+\cos\theta) d\theta d\phi \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi} (2+\cos\theta) d\theta = 2\pi\left[(2\theta+\sin\theta)\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi\left[(2\theta+\sin\theta)\right]_0^{2\pi} = 8\pi^2.
\end{aligned}$$