Aufgabe 35: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$h(x,y,z) := y^2 + z^2 - 4 = 0\,,$$
$$g(x,y,z) := x + y - 1 = 0\,,$$
$$\mathbf{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren? Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig und geben Sie den Tangentialraum an.
Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:$h(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4 = 0$ beschreibt einen Kreiszylinder, dessen Grundfläche durch einen Kreis mit Radius 2 (Mittelpunkt auf der x-Achse) dargestellt wird. $g(x,y,z) = x + y - 1 = 0$ beschreibt die affine Ebene $x + y = 1$, jeder Punkt p in dieser Ebene hat eine Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{für gewisse } r, s \in \mathbb{R}.$$

Folglich beschreibt

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

die Schnittmenge $\mathcal{M}$ beider Figuren, es ist eine Ellipse in der affinen Ebene. Diese kann lokal mit den Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 : [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ wie folgt parametrisiert werden:

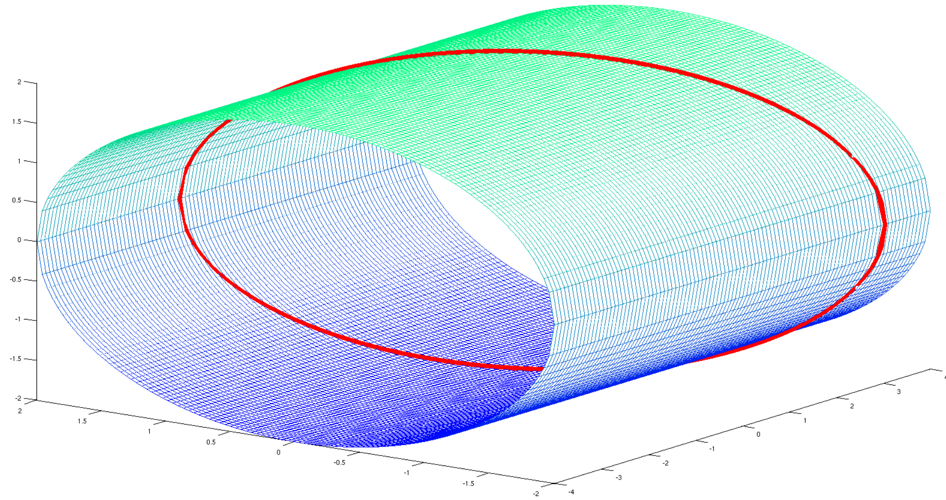
$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ \sqrt{4-t^2} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -\sqrt{4-t^2} \end{pmatrix}.$$

Diese Parametrisierungen ergeben sich, indem man in Abhängigkeit von y die Koordinaten x und z aus (1) bestimmt. Der Tangentialraum kann aus den Gradienten (der Rang der Matrix $(\nabla h\ \nabla g)$ ist für alle Punkt in $\mathcal{M}$ 2!)

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Vektorprodukts wie folgt berechnet werden:

$$T_{(x,y,z)}\mathcal{M} = \operatorname{span}\{\nabla h \times \nabla g\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -z \\ z \\ -y \end{pmatrix}\right\}.$$



Aufgabe 36: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

LÖSUNG:Minimieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

f ist das Quadrat des Abstandes!
Zur Lösung bilden wir die Lagrangesche Funktion

$$F(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

und wenden den Satz über Extrema unter Nebenbedingungen an.

$$\begin{aligned} &\partial_x F =: F_x = f_x - \lambda g_x = 2(x-1) - 2\lambda x = 0\,, \\ &\partial_y F =: F_y = f_y - \lambda g_y = 2(y+1) - 2\lambda y = 0\,, \\ &\partial_z F =: F_z = f_z - \lambda g_z = 2z + 2\lambda z = 0\,, \\ &\partial_\lambda F = F_\lambda = -g = 0\,. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2z(1+\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ y(1-\lambda) = -1 \\ 2x(1-\lambda) - 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x(1-\lambda) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda = -\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -y} \quad (\lambda \neq 1\,!)$$

und ($\boxed{z=0}$ oder $\boxed{\lambda=-1}$).
Fall 1: $x=-y$ und $z=0$:

$$\Rightarrow\ 1=x^2+x^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(2-\sqrt{2})^2}{4}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} \\ &= (\sqrt{2}-1)^2\,. \\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2 \\ &= \frac{2(2+\sqrt{2})^2}{4}=(1+\sqrt{2})^2\,. \end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda=-1\ \Rightarrow\ 1-\lambda=2$:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y+2=0\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}\,, \\ 4x-2=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0=g\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},z\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-z^2-1$$

$$\Leftrightarrow z^2=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\,,\quad \text{keine Lösung!}$$

Der minimale Wert ist also: $(\sqrt{2}-1)^2=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.
Beachte: Die Funktion $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y+1)^2+z^2$ ist stetig und für jedes feste $z_0\in\mathbb{R}$ ist $M_{z_0}=\{(x,y,z_0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1+z_0^2\}$ ein(e) Kreis(linie) mit Mittelpunkt $M=(0,0,z_0)$ und Radius $R=\sqrt{1+z_0^2}$, also abgeschlossen und beschränkt. Daher besitzt f in M_{z_0} sowohl Minimum als auch Maximum.
Bemerkung: Am obigen Gleichungssystem erkennt man, dass der Verbindungsvektor (x_0-x,y_0-y,z_0-z) parallel zu $\operatorname{grad} g(x,y,z)$ liegt.

Aufgabe 37: a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z):=x^2y^2z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2=1$.

b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}$$

zwischen dem geometrischen Mittel $\sqrt[3]{abc}$ und dem arithmetischen Mittel $\frac{a+b+c}{3}$, welche für alle nichtnegativen $a,b,c\in\mathbb{R}$ gilt.

LÖSUNG:

a) Auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nimmt die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2y^2z^2$$

einen größten Wert an, da f stetig ist und die Kugeloberfläche beschränkt und abgeschlossen ist.

Nach dem Satz über Extrema unter Nebenbedingungen bilden wir:

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2y^2z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

und erhalten durch Ableiten:

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_x F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_z F(x,y,z,\lambda) = 0 \\ \partial_\lambda F(x,y,z,\lambda) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2xy^2z^2 - 2\lambda x = 0 \\ 2x^2yz^2 - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2y^2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x(y^2z^2 - \lambda) = 0 \\ 2y(x^2z^2 - \lambda) = 0 \\ 2z(x^2y^2 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Die Lösungen mit $x = y = z = 0$ können wir ausschließen, da $f(0, 0, 0) = 0$ offenbar der kleinste Wert von f überhaupt ist und $(0, 0, 0)$ nicht auf der Kugeloberfläche liegt. Die anderen (möglichen) Lösungen ergeben:

$$\begin{aligned} &\lambda = y^2z^2 = x^2z^2 = x^2y^2 \\ \Rightarrow &x^2 = y^2 = z^2 \text{ und } \lambda = x^4 = y^4 = z^4\,. \\ \Rightarrow &x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}, \quad \text{wegen der Nebenbedingung } x^2 + y^2 + z^2 = 1\,. \\ \Rightarrow &\lambda = x^4 = \frac{1}{9} \text{ und} \\ &x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\ z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,. \\ \Rightarrow &f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27} > 0\,. \end{aligned}$$

Dies liefert den maximalen Wert von f unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2 = 1$, da f seinen größten Wert auf der Kugel annimmt und in allen in Frage kommenden Punkten denselben Wert – nämlich $\frac{1}{27}$ – hat.

b) Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, dass für Punkte auf der Kugeloberfläche der Einheitskugel gilt

$$f(x, y, z) \le \frac{1}{27} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2y^2z^2 \le \frac{1}{27}.$$

Daraus folgt

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Setze nun

$$x^2 = \frac{a}{a+b+c} \geq 0\,,\;\; y^2 = \frac{b}{a+b+c} \geq 0\,,\;\; z^2 = \frac{c}{a+b+c} \geq 0\,,$$

dann folgt daraus

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Die so gewählten x, y und z erfüllen also unsere Nebenbedingung. Somit können wir sie einsetzen in

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{1}{3}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+c)^3}} &\leq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \qquad \sqrt[3]{abc} &\leq \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c \geq 0$ und $a + b + c > 0$.