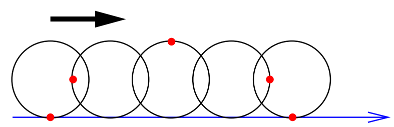
Aufgabe 38: Betrachten Sie eine Ellipse (in der Ebene) mit den Halbachsen a und b und bestimmen Sie die Krümmung in den Scheitelpunkten.

Aufgabe 39: Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.

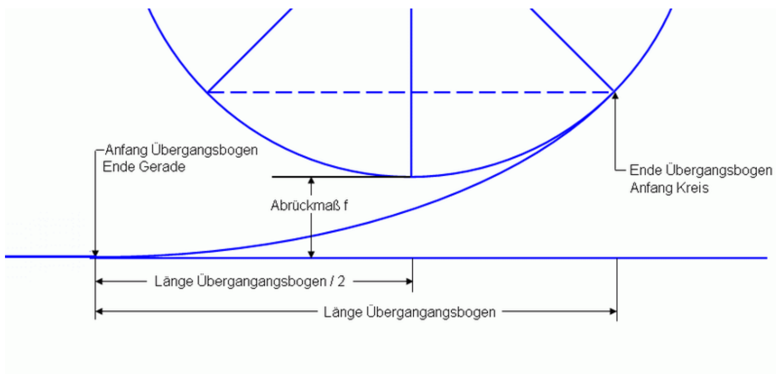


b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

Aufgabe 40: In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der "beste" Looping in einer Achterbahn ein Klothoiden-Looping ist. Eine Klothoide ist eine Kurve $x : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass die Krümmung an jedem Punkt proportional zur Länge bis zu dieser Stelle ist. Das folgende Bild zeigt den Übergang von einer Geraden zum Kreis mit einer sogenannten Klothoiden im allgemeinen Fall (aus http://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cbergangsbogen)



Der Looping besteht also aus einem Kreisbogen und zwei Klothoiden, an den Übergangsstellen zum Kreisbogen bzw. zur Geraden stimmen die Ableitungen bis zur Ordnung 2 überein. Wir nehmen zusätzlich an, dass sowohl der Achterbahnzug als auch die Fahrgäste einen einzigen Massenpunkt bilden und es weder Reibung noch Luftwiderstand gibt (Erinnerung: $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$).

a) Berechnen Sie den Radius R und die Krümmung κ_{Kreis} des Kreisbogens, wenn man davon ausgeht, dass die Fahrgäste bei einer Geschwindigkeit von $20 \frac{m}{s}$ im oberen Punkt schwerelos sind.

b) Die Klothoide x erfüllt folgende Bedingungen:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = e_1 \text{ und } \kappa(t) = \frac{1}{A^2} t.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung der bogenlängenparametrisierten Klothoide folgendermaßen gegeben ist:

$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \\ \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \end{pmatrix} ds. \tag{1}$$

c) Sei im Folgenden $A = \frac{R}{2}$. Was ist die Länge einer der beiden Klothoiden bis zum Berührpunkt mit dem Kreis?

d) Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Klothoiden mit Restglied $O(t^4)$ um den Ursprung an.

Aufgabe 41: Bestimmen Sie mit einer Programmiersprache Ihrer Wahl das Integral in Gleichung (1) aus Aufgabe 40 für $t =$"Berührpunkt aus 40c)", indem Sie die Sinus- bzw. Kosinus-Reihe bis zur Ordnung $2, 4, 6, 8$ komponentenweise integrieren. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den exakten Werten

$$x_1 = 10.1777638111437820 \qquad x_2 = 0.4242628624214808$$

und der Taylor-Entwicklung aus 40d).