Aufgabe 38: Betrachten Sie eine Ellipse (in der Ebene) mit den Halbachsen a und b und bestimmen Sie die Krümmung in den Scheitelpunkten.

LÖSUNG:Eine Parametrisierung dieser Ellipse ist:

$$\begin{cases} x &= a\cos(\theta) \\ y &= -b\sin(\theta) \end{cases}$$

Dies ergibt den Tangentialvektor

$$t = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin(\theta) \\ -b\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

am Punkt $M = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}$.
Die Ableitung von t nach θ ist

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

und nach der Vorlesung ist die Krümmung an M definiert als

$$\begin{aligned} \kappa(M) = \kappa(\theta) = \|t\|^{-3} \frac{\partial t}{\partial \theta} \cdot \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix} &= \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)}^3} \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2\frac{y^2}{b^2} + b^2\frac{x^2}{a^2}}^3}, \end{aligned}$$

weil

$$\sin(\theta) = -\frac{y}{b} \quad \text{und} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{a}.$$

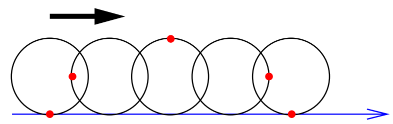
Die Scheitelpunkte dieser Ellipse sind

$$A_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Krümmungen sind $\kappa(A_1) = \kappa(A_2) = \frac{a}{b^2}$ und $\kappa(B_1) = \kappa(B_2) = \frac{b}{a^2}$.

Aufgabe 39: Betrachten wir einen Kreis vom Radius r, der mit der Geschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x-Achse entlang rollt. Es sei P derjenige Punkt, mit dem der Kreis den Koordinaten-Ursprung berührt.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, die P durchläuft.



b) Zu welchem Zeitpunkt und wo berührt der Punkt P zum zweiten Mal die x-Achse?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P bis zur zweiten Berührung entlang bewegt hat.
Tipp:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

LÖSUNG:

a) Sei G der Mittelpunkt dieses Kreises und $G(t) = G_0 + vt = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Parametrisierung der Bewegung von G, wobei t die Zeit ist.

P rotiert um G und daraus kann man $X - G$ als $X - G = \begin{pmatrix} -r\sin(\omega t) \\ -r\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ parametrisieren, dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit, die sich als $\omega = \frac{1}{r}$ ergibt.

Dies wird anschaulich klar, wenn man sich überlegt, dass bei gleicher Geschwindigkeit ein halb so großer Kreis doppelt so oft rotiert.

Damit schließen wir, dass die Parametrisierung von X sich schreiben lässt als

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin(\frac{1}{r}t) \\ -r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\sin(\frac{1}{r}t) \\ r\cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix}.$$

b) Der Punkt P berührt immer dann die x-Achse, wenn die y-Komponente von $X(t)$ gleich Null ist, das heißt wenn

$$\begin{aligned} & r - r\cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos\left(\frac{1}{r}t\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{r}t = 2\pi j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0 \\ \Leftrightarrow \quad & t = 2\pi r j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = 0$ berührt der Punkt P die x-Achse also zum ersten Mal und die zweite Berührung findet zur Zeit $t = 2\pi r$ statt.

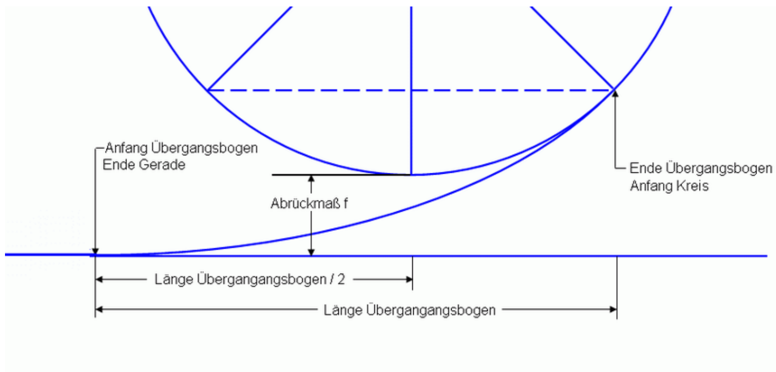
c) Die Bogenlänge der Kurve, entlang derer sich der Punkt P von der ersten bis zur zweiten Berührung mit der x-Achse bewegt hat, berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
s(2\pi r) &= \int_0^{2\pi r} \|\dot{X}(\xi)\|\, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left\| \begin{pmatrix} 1-\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{r}\xi\right) \end{pmatrix} \right\| \, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(\left(1-\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{1}{r}\xi\right) \right)^{\frac{1}{2}} \, d\xi \\
&= \int_0^{2\pi r} \left(2-2\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)\right)^{\frac{1}{2}} \, d\xi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi r} \sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{r}\xi\right)}\, d\xi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi r} \sqrt{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\right)}\, d\xi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi r} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{1}{2r}\xi\right)}\, d\xi.
\end{aligned}$$

Da $\sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \geq 0$ für $\xi \in [0, 2\pi r]$ gilt

$$\begin{aligned}
s(2\pi r) &= 2\int_0^{2\pi r} \sin\left(\frac{1}{2r}\xi\right) \, d\xi \\
&= -4r\cos\left(\frac{1}{2r}\xi\right)\Bigg|_0^{2\pi r} \\
&= -4r\,(-1-1) \\
&= 8r.
\end{aligned}$$

Aufgabe 40: In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der "beste" Looping in einer Achterbahn ein Klothoiden-Looping ist. Eine Klothoide ist eine Kurve $x : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass die Krümmung an jedem Punkt proportional zur Länge bis zu dieser Stelle ist. Das folgende Bild zeigt den Übergang von einer Geraden zum Kreis mit einer sogenannten Klothoiden im allgemeinen Fall (aus `http://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cbergangsbogen`)



Der Looping besteht also aus einem Kreisbogen und zwei Klothoiden, an den Übergangsstellen zum Kreisbogen bzw. zur Geraden stimmen die Ableitungen bis zur Ordnung 2 überein. Wir nehmen zusätzlich an, dass sowohl der Achterbahnzug als auch die Fahrgäste einen einzigen Massenpunkt bilden und es weder Reibung noch Luftwiderstand gibt (Erinnerung: $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$).

a) Berechnen Sie den Radius R und die Krümmung κ_{Kreis} des Kreisbogens, wenn man davon ausgeht, dass die Fahrgäste bei einer Geschwindigkeit von $20 \frac{m}{s}$ im oberen Punkt schwerelos sind.

b) Die Klothoide x erfüllt folgende Bedingungen:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = e_1 \text{ und } \kappa(t) = \frac{1}{A^2} t.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung der bogenlängenparametrisierten Klothoide folgendermaßen gegeben ist:

$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \\ \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) \end{pmatrix} ds. \tag{1}$$

c) Sei im Folgenden $A = \frac{R}{2}$. Was ist die Länge einer der beiden Klothoiden bis zum Berührpunkt mit dem Kreis?

d) Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Klothoiden mit Restglied $O(t^4)$ um den Ursprung an.

LÖSUNG:

a) Es gilt $R = \frac{v^2}{g} = \frac{(20\frac{m}{s})^2}{9{,}81\frac{m}{s^2}} \approx 40.77m$ und für die Krümmung $\kappa = \frac{1}{R} = 0.0245\frac{1}{m}$.

b) Aus den Annahmen folgt $\dot{x}(t) = (\cos(\phi(t)), \sin(\phi(t)))^T$ mit $\phi(0) = 0$ und $|\ddot{x}(t)| = \dot{\phi}(t) = \frac{1}{A^2}t$. Es ergibt sich $\phi(t) = \frac{t^2}{2A^2}$ und damit die Gleichung.

c) Im Berührpunkt gilt $\kappa_{\text{Klothoide}}(t) = \kappa_{\text{Kreis}}$, also $\frac{1}{(R/2)^2}t = \frac{1}{R}$ und damit $t = \frac{R}{4} = 10,19m$.

d) Aus den Annahmen folgt $\dot{x}_1(0) = 1$ und $\ddot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \ddot{x}_2(0) = 0$. Weiterhin gilt wegen b)

$$\dddot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t))\ddot{\phi}(t) - \cos(\phi(t))(\dot{\phi}(t))^2 \\ \cos(\phi(t))\ddot{\phi}(t) - \sin(\phi(t))(\dot{\phi}(t))^2 \end{pmatrix}$$

also $\dddot{x}_1(0) = 0$ und $\dddot{x}_2(0) = \frac{1}{A^2}$. Daher gilt $x_1(t) = t + O(t^4)$ und $x_2(t) = \frac{1}{6A^2}t^3 + O(t^4)$.

Für weitere Informationen siehe “Rollercoaster loop shapes”

Aufgabe 41: Bestimmen Sie mit einer Programmiersprache Ihrer Wahl das Integral in Gleichung (1) aus Aufgabe 40 für $t =$“Berührpunkt aus 40c)”, indem Sie die Sinus- bzw. Kosinus-Reihe bis zur Ordnung $2, 4, 6, 8$ komponentenweise integrieren. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den exakten Werten

$$x_1 = 10.1777638111437820 \qquad x_2 = 0.4242628624214808$$

und der Taylor-Entwicklung aus 40d).

LÖSUNG:Die Formeln für die Sinusreihe und die Kosinusreihe sind

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots \text{ und } \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots.$$

Integriert man diese Reihen komponentenweise und wertet das Integral bei $t = \frac{R}{4} = \frac{100}{9.81}$ bis zur Ordnung $n = 2, 4, 6, 8$ aus, so ergibt sich folgendes:

Iteration	Integral des Kosinus	absoluter Fehler
0	10.1936799184505595	0.0159161073067775
2	10.1777522935779814	0.0000115175658006
4	10.1777638152973626	0.0000000041535806
6	10.1777638111428956	0.0000000000008864
8	10.1777638111437820	0.0000000000000000

Iteration	Integral des Sinus	absoluter Fehler
1	0.4247366632687733	0.0004738008472925
3	0.4242626268142323	0.0000002356072485
5	0.4242628624857651	0.0000000000642843
7	0.4242628624214698	0.0000000000000110

Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Kosinus): 0.0159161073067775
Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Sinus): 0.0004738008472925
Man erkennt, dass der absolute Fehler sowohl bei der Taylor-Entwicklung als auch bei der komponentenweisen Intregration der trigonometrischen Reihen gegen 0 konvergiert.

Matlab-Code:

```
clear all;
close all;
clc;

t=100/9.81;
A=200/9.81;

%Exakte Werte
X = 0.499219314936602557815 * A;
Y = 0.020810093401773634288 * A;
fprintf('Exakte Werte: x=%2.16f  y=%2.16f\n',X,Y);

for l=0:2:8
    if l==0
        x1=t;
    else
    x1=x1+(-1)^(l/2)*(1/factorial(l))*((1/(2*A^2))^l)*1/(2*l+1)*t^(2*l+1);
    end
    fprintf('Integral des Kosinus nach Iteration %1.0f: %2.16f      Absoluter Fehler: %2.16f\n',l,
        x1,abs(x1-X));
end

x2=0;
for l=1:2:7
    x2=x2+(-1)^((l-1)/2)*(1/factorial(l))*((1/(2*A^2))^l)*1/(2*l+1)*t^(2*l+1);
    fprintf('Integral des Sinus nach Iteration %1.0f: %2.16f      Absoluter Fehler: %2.16f\n',l,x2,
        abs(x2-Y));
end

%Taylor

fprintf('Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Kosinus): %2.16f\n',abs(t-X));
fprintf('Absoluter Fehler bzgl. Taylor (Sinus): %2.16f\n',abs((t^3)/(6*A^2)-Y));
```