Aufgabe 42: Zeigen Sie:
Für eine zweimal differenzierbare Kurve $x(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ lässt sich die Absolutkrümmung mittels

$$k(t) = \|\dot{x}(t)\|^{-3} \|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)\|$$

berechnen.

Tipp: Zeigen Sie $k(t) = \kappa(t)$, wobei $\kappa(t)$ durch die Formel in der Vorlesung gegeben ist. Verwenden Sie eine geeignete Eigenschaft des Kreuzproduktes.

Aufgabe 43: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s, v) \mapsto X(s, v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) &:= X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

Aufgabe 44: Betrachten Sie die durch $X : [0, 2\pi) \times [0, 100] \to \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um den Drehzylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die Kurven

$$\gamma_1(t) := X(0, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$
$$\gamma_2(t) := X(t, 10) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 10 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_3(t) := X(t, t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

in Ihre Skizze. Um welche Kurven (auf der Fläche) handelt es sich?

c) Berechnen Sie $\dot{\gamma}_i(t)$, $\ddot{\gamma}_i(t)$ und $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$N_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$N_3(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\pi)$ orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sind und, dass gilt $N_i(t)$ ist orthogonal zu $\dot{\gamma}_i(t) \times \ddot{\gamma}_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$. Versuchen Sie sich die Situation in einer Skizze zu veranschaulichen.