Aufgabe 42: Zeigen Sie:
Für eine zweimal differenzierbare Kurve $x(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ lässt sich die Absolutkrümmung mittels

$$k(t) = \|\dot{x}(t)\|^{-3}\|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)\|$$

berechnen.

Tipp: Zeigen Sie $k(t) = \kappa(t)$, wobei $\kappa(t)$ durch die Formel in der Vorlesung gegeben ist. Verwenden Sie eine geeignete Eigenschaft des Kreuzproduktes.

LÖSUNG:Aus der Vorlesung wissen wir

$$\|\dot{x}(t) \times \ddot{x}(t)\|^2 = \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 - (\dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t))^2$$

und diese Eigenschaft wollen wir nutzen, um die Gleichheit von $k(t)$ und $\kappa(t)$ zu zeigen.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \kappa(t) & = & k(t) \\
\Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-4}\,\big\|\|\dot{x}(t)\|^2\ddot{x}(t) - (\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))\,\dot{x}(t)\big\| & = & \|\dot{x}(t)\|^{-3}\|\dot{x}(t)\times\ddot{x}(t)\| \\
\Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-1}\,\big\|\|\dot{x}(t)\|^2\ddot{x}(t) - (\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))\,\dot{x}(t)\big\| & = & \|\dot{x}(t)\times\ddot{x}(t)\| \\
\Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-2}\,\big\|\|\dot{x}(t)\|^2\ddot{x}(t) - (\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))\,\dot{x}(t)\big\|^2 & = & \|\dot{x}(t)\times\ddot{x}(t)\|^2 \\
\Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^{-2}\left(\|\dot{x}(t)\|^4\|\ddot{x}(t)\|^2 + \|\dot{x}(t)\|^2\,(\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t))^2\right) & = & \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 + (\dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t))^2 \\
\Leftrightarrow & \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 + (\dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t))^2 & = & \|\dot{x}(t)\|^2\|\ddot{x}(t)\|^2 + (\dot{x}(t)\cdot\ddot{x}(t))^2
\end{array}$$

Aufgabe 43: Betrachten Sie die durch $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$(s, v) \mapsto X(s, v) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um das einschalige Drehhyperboloid mit der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die beiden Kurven (z.B. für $v_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ und $s_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &:= X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \text{const} \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(v) &:= X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 - v \sin s_0 \\ \sin s_0 + v \cos s_0 \\ v \end{pmatrix} \quad s_0 = \text{const} \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

in Ihre Skizze.

c) Berechnen Sie die Absolutkrümmung der beiden Kurven.

Lösung:

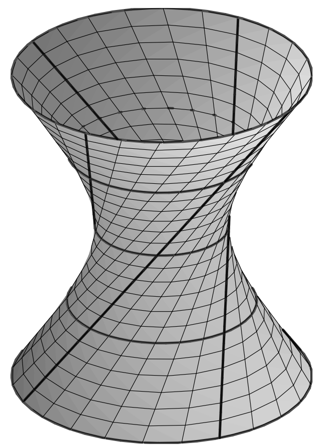
a) Mit

$$\begin{aligned} x &= \cos s - v \sin s \\ y &= \sin s + v \cos s \\ z &= v \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (\cos s - v \sin s)^2 + (\sin s + v \cos s)^2 - v^2 \\ &= \cos^2 s - 2v \cos s \sin s + v^2 \sin^2 s \\ &\quad + \sin^2 s + 2v \cos s \sin s + v^2 \cos^2 s - v^2 \\ &= 1 + v^2 - v^2 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte: $x^2 + y^2 - z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z^2 = x^2 + y^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,.$



b) $\gamma_1(s) = X(s, v_0) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{1+v_0^2}$:

$$\left\| \gamma_1(s) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \cos s - v_0 \sin s \\ \sin s + v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + v_0^2$$

$\gamma_2(v) = X(s_0, v) = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} \cos s_0 \\ \sin s_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $v = 0$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die auf obigem einschaligen Drehhyperboloid liegt.

c) Die Absolutkrümmung $\kappa_1(s)$ von $\gamma_1(s)$ ergibt sich als

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\,.$$

Denn:

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} -\sin s - v_0 \cos s \\ \cos s - v_0 \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|\dot{\gamma}_1(s)\| &= (\sin^2 s + 2v_0 \cos s \sin s + v_0^2 \cos^2 s \\
&\quad + \cos^2 s - 2v_0 \cos s \sin s + v_0^2 \sin^2 s)^{1/2} \\
&= \sqrt{1+v_0^2}\,, \\
\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3 &= \sqrt{1+v_0^2}^{\,3}\,, \\
\ddot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} -\cos s + v_0 \sin s \\ -\sin s - v_0 \cos s \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\dot{\gamma}_1(s) \times \ddot{\gamma}_1(s) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\sin s - v_0 \cos s)(-\sin s - v_0 \cos s) \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\cos s + v_0 \sin s)(\cos s - v_0 \sin s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+v_0^2 \end{pmatrix}, \\
\|\dot{\gamma}_1(s) \times \ddot{\gamma}_1(s)\| &= 1+v_0^2\,, \\
\Rightarrow\ \kappa_1(s) &= \frac{\|\dot{\gamma}_1(s) \times \ddot{\gamma}_1(s)\|}{\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3} = \frac{1+v_0^2}{(1+v_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}}\,. \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Dies sollte auch so sein, da ein Kreis die Krümmung $\kappa = \frac{1}{\text{Radius}}$ hat!

Die Absolutkrümmung $\kappa_2(s)$ von $\gamma_2(s)$ lautet dementsprechend

$$\kappa_2(v) \equiv 0\,.$$

Anschaulich ist das klar, da $\gamma_2(s)$ eine Gerade beschreibt!

In Formeln:

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} -\sin s_0 \\ \cos s_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{konstanter Vektor!} \\
\Rightarrow\ \ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\ \dot{\gamma}_2(v) \times \ddot{\gamma}_2(v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ \kappa_2(v) = 0\,!$$

Beachte: $\|\dot{\gamma_2}(v)\| = \sqrt{2} > 0\,!$

Aufgabe 44: Betrachten Sie die durch $X : [0, 2\pi) \times [0, 100] \to \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ 2\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

parametrisierte Fläche.

a) Zeigen Sie, dass es sich um den Drehzylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ handelt und fertigen Sie eine Skizze zur Veranschaulichung der Fläche an.

b) Zeichnen Sie die Kurven

$$\gamma_1(t) := X(0, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2(t) := X(t, 10) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3(t) := X(t, t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

in Ihre Skizze. Um welche Kurven (auf der Fläche) handelt es sich?

c) Berechnen Sie $\dot{\gamma_i}(t)$, $\ddot{\gamma_i}(t)$ und $\dot{\gamma_i}(t) \times \ddot{\gamma_i}(t)$ für $i = 1, 2, 3$.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$N_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$N_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$N_3(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\pi)$ orthogonal zu $\dot{\gamma_i}(t)$, $i = 1, 2, 3$, sind und, dass gilt $N_i(t)$ ist orthogonal zu $\dot{\gamma_i}(t) \times \ddot{\gamma_i}(t)$ für $i = 1, 2, 3$. Versuchen Sie sich die Situation in einer Skizze zu veranschaulichen.

LÖSUNG:

a) Drehzylinder mit $x^2 + y^2 = 4$ und Höhe $h = 100$:

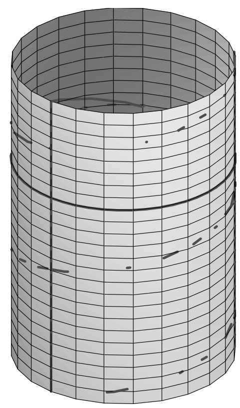
Mit

$$\begin{aligned} x &= 2\cos u\,, \\ y &= 2\sin u \end{aligned}$$

ergibt sich

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4 \quad \checkmark$$

$v \in [0, 100] \;\Rightarrow\; h = 100\,.$



b) $\gamma_1(t) = X(0,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Gerade mit Anfangspunkt $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (für $t = 0$) und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \partial_t X$, welche ganz auf dem Drehzylinder liegt. Es handelt sich um eine Mantellinie.

$\gamma_2(t) = X(t, 10) = 2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 5 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ und Radius $r = 2$, welcher ganz auf dem Drehzylinder liegt.
Es handelt sich um einen Breitenkreis des Drehzylinders in der Höhe $h = z = 10$.

$\gamma_3(t) = X(t,t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$ beschreibt eine Schraubenlinie, die auf dem Drehzylinder liegt.

c) $\dot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ddot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot\gamma_1 \times \ddot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot\gamma_2 = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ddot\gamma_2 = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot\gamma_2 \times \ddot\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\dot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ddot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot{\gamma}_3 \times \ddot{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \\ 4 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned}
N_1(t) \cdot \dot{\gamma}_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ N_1 \perp \dot{\gamma}_1\,! \\
N_1(t) \cdot (\dot{\gamma}_1(t) \times \ddot{\gamma}_1(t)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ N_1 \perp (\dot{\gamma}_1 \times \ddot{\gamma}_1)\,! \\
N_2(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ N_2 \perp \dot{\gamma}_2\,! \\
N_2(t) \cdot (\dot{\gamma}_2(t) \times \ddot{\gamma}_2(t)) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ N_2 \perp (\dot{\gamma}_2 \times \ddot{\gamma}_2)\,! \\
N_3(t) \cdot \dot{\gamma}_3(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ N_3 \perp \dot{\gamma}_3\,! \\
N_3(t) \cdot (\dot{\gamma}_3(t) \times \ddot{\gamma}_3(t)) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -2\cos t \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ N_3 \perp (\dot{\gamma}_3 \times \ddot{\gamma}_3)\,!
\end{aligned}$$