Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universität bonn

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag, 25.10.2011**

Aufgabe 1. (Elementarmatrizen) (10 Punkte)

a) Stellen Sie folgende Matrixoperationen auf $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als Multiplikation mit geeigneten Matrizen dar:

(1) Multiplikation der Zeile i mit $\lambda \neq 0$.

(2) Vertauschung der Zeilen i und $j \neq i$.

(3) Addition des λ-fachen einer Zeile i zu einer Zeile $j \neq i$.

Zeigen Sie, dass diese Operationen durch Multiplikation mit der jeweiligen Inversen rückgängig gemacht werden, und geben Sie die Inversen an.

b) Wie wirken sich diese Operationen auf $\det(A)$ aus?

Aufgabe 2. (Satz von Gerschgorin, Cholesky-Zerlegung) (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in der Vereinigung der sogenannten *Gerschgorin-Kreise*

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

liegen. (*Hinweis:* Betrachten Sie zu gegebenem Eigenwert λ einen Eigenvektor x mit normierter maximaler Komponente $|x_i| = 1$.)

b) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei symmetrisch und strikt diagonaldominant mit positiven Diagonaleinträgen, d.h. $a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$. Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

c) Untersuchen Sie, für welche der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

eine Cholesky-Zerlegung existiert, und geben Sie diese, falls vorhanden, zusammen mit der Determinante an.

d) Es existiere die Cholesky-Zerlegung $A = \hat{L}\hat{L}^T$. Wie erhält man daraus die LR-Zerlegung von A, wobei in der Hauptdiagonalen von L nur Einsen stehen?

Programmieraufgabe 1. (LR-Zerlegung) (16 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $x, b \in \mathbb{R}^n$. Schreiben Sie ein Programm, das ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mittels LR-Zerlegung von A und anschließender Vorwärts- und Rückwärtssubstitution löst (keine Pivotsuche). Dabei soll für die Abspeicherung von L und R nicht mehr Speicherplatz als für A benötigt werden, d.h. die Elemente von A müssen geeignet überschrieben werden.
Testen Sie den Algorithmus anhand der 16×16-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & -I & T & -I \\ & & -I & T \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad T = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

und I die 4×4-Identität ist. Als rechte Seite wähle man $b = (b_1\ b_2\ b_2\ b_1)^T \in \mathbb{R}^{16}$ mit $b_1 = (6, 5, 5, 6)^T \in \mathbb{R}^4$ und $b_2 = (5, 4, 4, 5)^T \in \mathbb{R}^4$. Geben Sie die zerlegte Matrix und den Lösungsvektor aus.

> Abgabe **Mi 26.10.** und **Do 27.10.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`).
> Ab Mi 19.10. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich in 2–3er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.
> Grundsätzlich wird es ab Di 25.10. alle zwei Wochen Programmieraufgaben geben, die am Mi und Do zwei Wochen darauf im CIP-Pool abgenommen werden. Jeweils eine Woche vor Abgabe hängt eine neue Terminliste aus. Die Punkte werden individuell vergeben, daher dürfen die Gruppenzusammenstellungen variieren.

Gesamtpunktzahl: 22 + 16 Punkte

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A1. (LR-Zerlegung) (Anwesenheitsaufgabe, ohne Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung einer regulären Matrix $A = LR$, wobei L eine untere und R eine obere Dreiecksmatrix sei, nicht notwendigerweise existiert und, falls sie existiert, nicht notwendigerweise eindeutig ist.

b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

wobei $\forall\, i \quad l_{ii} = 1$ mit $L = (l_{ij})$ gelte.

c) Bestimmen Sie $\det(A)$ mit Hilfe der LR-Zerlegung aus b).

d) Berechnen Sie A^{-1} durch Lösen der Gleichungssysteme

$$Ly_k = e_k, \quad Rx_k = y_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Dabei sind e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe A2. (QR-Zerlegung, Gram-Schmidt) (Anwesenheitsaufgabe, ohne Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ die durch das Gram-Schmidt-Verfahren gewonnene Orthonormalbasis, d.h.

$$\tilde{q}_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle a_j, q_k \rangle \, q_k \quad \text{und} \quad q_j = \frac{1}{\|\tilde{q}_j\|_2}\tilde{q}_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

a) Zeigen Sie, dass für $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $r_{kj} = \left\{ \begin{array}{ll} \langle a_j, q_k \rangle & \text{für } k < j \\ \|\tilde{q}_j\|_2 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$ die Zerlegung $A = QR$ folgt.

b) Berechnen Sie Q und R für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.