Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universität**bonn**

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag, 10.1.2012**

Aufgabe 29. (Konsistenzordnung von Finiten Differenzen) (6 Punkte)

Für die zweite Ableitung $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ einer Funktion $u(x)$ wurde eine Diskretisierung mit dem Differenzenstern $h^{-2}[-1 \quad 2 \quad -1]$ gewählt und die Konsistenzordnung 2 nachgewiesen. Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, eine Diskretisierung der Konsistenzordnung 3 zu konstruieren, die die Sternnotation $[\alpha \quad \beta \quad \gamma]$ besitzt.

Aufgabe 30. (Finite Differenzen) (8 Punkte)

Gegeben sei folgender spezieller Stern

$$h^{-2}\begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix},$$

bei dem ein Gitter zugrundegelegt wird, das sowohl in x- als auch in y-Richtung dieselbe Maschenweite h hat. Geben Sie an, welchen Differentialoperator dieser Stern diskretisiert, und ermitteln Sie die Konsistenzordnung der Diskretisierung.

Aufgabe 31. (Finite Differenzen auf nicht-äquidistanten Gittern) (8 Punkte)

Auf $[0,1]$ führe man das Gitter $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ mit $\bar{\Omega}_h = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = 1\}$ ein, wobei $x_{i+1} - x_i \neq x_{j+1} - x_j$ für $i \neq j$ und $0 \leq i, j \leq n-1$ gilt. Damit ist $\bar{\Omega}_h$ ein *nicht-äquidistantes* Gitter, für das keine eindeutige Maschenweite h existiert.

a) Berechnen Sie über den Ansatz $\bar{\delta} f = \alpha f(x_{i-1}) + \beta f(x_i) + \gamma f(x_{i+1})$ eine Diskretisierung für die zweite Ableitung und geben Sie die Diskretisierungsordnung an.

b) Zeigen Sie, dass sich die Diskretisierungsordnung ändert, wenn man $\bar{\delta} f$ bei einem äquidistanten Gitter anwendet. Welche Formel erhält man in diesem Fall für die Diskretisierung der zweiten Ableitung?

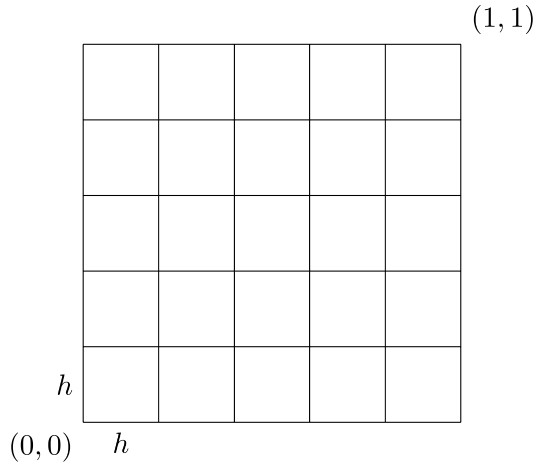
Bemerkung: Formeln dieser Art benötigt man, wenn man krummlinige Gebiete behandeln will, wo man i.A. kein äquidistantes Gitter einführen kann (z.B. Diskretisierung der Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe).

Programmieraufgabe 7. (Finite Elemente) (24 Punkte)

Gegeben sei das 2D-Poisson-Problem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir betrachten das Problem auf folgendem Vierecksgitter:



Als Basisfunktionen werden die Tensorprodukte der klassischen 1D stückweise linearen finiten Elemente gewählt.

Konstruieren Sie die entsprechenden Sterne für die Steifigkeitsmatrix A und Massenmatrix M anhand analytischer Integration. Implementieren Sie jeweils eine Routine zur Multiplikation Ax und Mx, ohne dabei die Matrizen explizit aufzustellen.

Wir betrachten nun eine "manufactured solution", d.h. zu der vorgegebenen Lösung $u(x,y) = x(1-x) \cdot y(1-y)$, $(x,y) \in \Omega$ bestimmen wir wiederum analytisch eine entsprechende rechte Seite für das obige Poisson-Problem. Nach Diskretisierung entsteht ein lineares Gleichungssystem, welches mittels CG-Verfahren gelöst werden soll.

Als Schrittweiten verwenden Sie $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$ und berechnen jeweils den Approximationsfehler $\|u - u_h\|$ in der L_2-Norm und in der Energie-Norm. Für die diskreten Normen gilt dabei: L_2-Norm $\|x\|_{L_2}^2 := x^T M x$ und Energie-Norm $\|x\|_A^2 := a(x,x) = x^T A x$.

Abgabe **Mi 18.1.** und **Do 19.1.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`).
Ab Mi 11.1. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich in 2–3er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 22 + 24 Punkte

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!