Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 17.1.2011**

Aufgabe 32. (Schwache Lösung) (12 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

a) Wir betrachten die homogene Poisson-Gleichung in ihrer starken Formulierung: Finde $u \in C_0^2(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass jede Lösung von (1) auch die sogenannte schwache Form erfüllt: Finde $u \in C_0^1$, so dass

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \text{für alle } v \in C_0^1(\Omega). \tag{2}$$

b) Umgekehrt kann man folgern, dass jede Lösung $u \in C_0^2(\Omega)$ von (2) auch eine Lösung von (1) ist. Zeigen Sie dies für den Fall $\Omega \subset \mathbb{R}$.

c) Wir betrachten nun das Funktional

$$I(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{(Dirichlet-Integral)}$$

und die dazugehörige Variationsaufgabe: Finde $u \in C_0^1(\Omega)$, so dass

$$I(u) \to \min! \tag{3}$$

Beweisen Sie, dass jede Lösung von (2) auch eine Lösung der Variationsaufgabe ist, und umgekehrt, dass jede Lösung von (3) auch eine Lösung der schwachen Form ist.

Aufgabe 33. (Anisotrope Diffusion) (14 Punkte)

Wir betrachten die anisotrope Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Leiten Sie mittels Galerkin-Verfahren die schwache Form der anisotropen Poisson-Gleichung her, d.h. bestimmen Sie $a(\cdot,\cdot)$ und $l(\cdot)$ für die Formulierung: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$a(u,v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

b) Geben Sie des weiteren die Steifigkeits- und Massenmatrix in Sternnotation an. Dafür werde Ω durch ein uniformes Gitter mit quadratischer Triangulierung diskretisiert, was einen Tensorproduktansatz für die Finiten Elemente erlaubt. Verwenden Sie dabei im Eindimensionalen die bekannten stückweise linearen „Hütchen“.

Aufgabe 34. (Lemma von Céa) (6 Punkte)

Sei V ein Hilbertraum mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_V$, und $V_h \subset V$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Beweisen Sie das *Lemma von Céa*: Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ sei stetig (mit Konstante a_∞) und V-elliptisch (mit Konstante a_0). Weiter seien u, u_h die Lösungen der schwachen Formulierungen

$$\begin{aligned} \text{suche } u \in V \text{ mit} \quad & a(u,v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in V, \\ \text{suche } u_h \in V_h \text{ mit} \quad & a(u_h,v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in V_h. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{a_\infty}{a_0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V,$$

d.h. u_h ist die Bestapproximation für u in V_h bis auf einen konstanten Faktor.

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte