Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag, 24.1.2012**

Aufgabe 35. (Finite Elemente) (9 Punkte)

Das Gebiet $\Omega = (0,1)^2$ werde zunächst in N^2 Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ zerlegt. Dann wird jedes der Quadrate in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt, wobei die Quadrate stets durch die Verbindung der unteren linken Ecke zur oberen rechten Ecke aufgespalten werden. Die Gitterpunkte bilden den diskreten Raum Ω_h.
Es seien die Gitterfunktionen $\phi_{ij}(x,y)$ auf Ω_h für $0 \leq i,j \leq N$ durch

$$\phi_{ij}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = ih \text{ und } y = jh \\ 0 & \text{für } (x,y) \in \Omega_h \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert und in x- und y-Richtung stückweise linear.

a) Zeichnen Sie die beschriebene Triangulierung für $N = 5$, und markieren Sie den Träger von $\phi_{2,2}(x,y)$. Skizzieren Sie außerdem perspektivisch eine solche Gitterfunktion ϕ_{ij}. Wie viele Einträge pro Matrixzeile sind in der Finite-Element-Matrix maximal enthalten, wenn die Funktionen ϕ_{ij} als Ansatzfunktionen verwendet werden?

b) Berechnen Sie für den Laplace-Operator den Eintrag der resultierenden Steifigkeitsmatrix, der zu den beiden Knoten (ih, jh) und $(ih, (j+1)h)$ gehört, also den Eintrag $a(\phi_{ij}, \phi_{i,j+1})$.

Aufgabe 36. (Aubin-Nitsche-Lemma) (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sei H ein Hilbertraum mit zugehöriger Norm $|\cdot|_H$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$. Der Unterraum $V \subset H$ sei ebenfalls ein Hilbertraum mit der Norm $|\cdot|_V$. Ferner sei V dicht in H ($\overline{V} = H$) und die Einbettung $V \hookrightarrow H$ stetig. Für die schwachen Lösungen u, u_h der Variationsprobleme

$$\begin{aligned} a(u,v) &= (f,v) \quad &&\text{für alle } v \in V, \\ a(u_h, v_h) &= (f, v_h) \quad &&\text{für alle } v_h \in V_h \subset V \end{aligned}$$

gilt dann

$$|u - u_h|_H \leq c \cdot |u - u_h|_V \cdot \sup_{g \in H, g \neq 0} \left\{ \frac{1}{|g|_H} \inf_{v_h \in V_h} |\phi_g - v_h|_V \right\},$$

falls jedem $g \in H$ die eindeutige (schwache) Lösung $\phi_g \in V$ des adjungierten Variationsproblems

$$a(v, \phi_g) = (g, v)_H \quad \text{für alle } v \in V \tag{1}$$

zugeordnet wird.
Hinweis: Beachten Sie, dass in Hilberträumen $|w|_H = \sup_{g \in H, g \neq 0} \left(\frac{|(g,w)_H|}{|g|_H} \right)$ für alle $w \in H$ gilt.

Bemerkung: Unter bestimmten Voraussetzungen an die Triangulierung lässt sich mit Hilfe dieses Lemmas für $H = H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ und $u \in H^2(\Omega)$ die Abschätzung $|u - u_h|_{L_2} \le c \cdot h^2 |f|_{L_2}$ beweisen.

Aufgabe 37. (Differenzieren in Banachräumen) (9 Punkte)

Sei das Differential einer Funktion $f : V \to W$ definiert als

$$D_x f(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\bar{x}) - f(x)}{h}.$$

Für Fréchet-differenzierbare Funktionen existiert der Grenzwert, es gilt die Taylorformel

$$f(x + h\bar{x}) = f(x) + hD_x f(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^2)$$

und der Operator $D_x f$ ist eine lineare Abbildung von V nach W. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für lineare Abbildungen $A \in L(V, W)$ die Gleichung $D_x A = A$ gilt. Zeigen Sie zusätzlich die folgenden Aussagen (auf die genauen Eigenschaften der Fréchet-Ableitung kann hier nicht eingegangen werden).

a) Für eine bilineare Abbildung $a : V \times V \to W$, definiert durch

$$\begin{aligned} a(u + v, w) &= a(u, w) + a(v, w), \\ a(u, v + w) &= a(u, v) + a(u, w), \\ a(\alpha u, \beta v) &= \alpha\beta\, a(u, v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gilt die Produktregel

$$D_{(x,y)} a(\bar{x}, \bar{y}) = a(x, \bar{y}) + a(\bar{x}, y).$$

b) Für nacheinandergeschaltete Funktionen $g : U \to V$, $f : V \to W$ gilt die Kettenregel

$$D_x(f \circ g)(\bar{x}) = (D_{g(x)} f \circ D_x g)(\bar{x}).$$

c) Für den Spezialfall von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $D_x f$ „nur“ eine reelle Zahl, $D_x f(\bar{x}) = \bar{x} f'(x)$. Aus obigen Produkt- und Kettenregeln folgt $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.

Programmieraufgabe 8. (Inverses Problem) (20 Punkte)

Wir erinnern an die bekannte Finite-Elemente-Diskretisierung des Einheitsintervalls mit Hutfunktionen $\phi_i(x)$ zentriert bei i/N und $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(x)$. Wir schreiben kurz u für den Vektor der Koeffizienten u_i. Gesucht ist die Parameterfunktion μ_h mit Koeffizienten μ_i, $i = 1, \dots, N-1$, die das Funktional

$$J(u_h, \mu_h) = \frac{1}{2}\|u_h - u_h^*\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2}|\mu|_{H_0^1}^2 = \frac{1}{2}(u - u^*)^T M (u - u^*) + \frac{\gamma}{2}\mu^T A \mu = J(u, \mu)$$

unter der Nebenbedingung $A_\mu u = \tilde{M} f$ mit der (vereinfachten) Matrix

$$A_\mu = h\,\mathrm{diag}(2 + \mu)$$

minimiert. Hier ist $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N+1)}$ die Massenmatrix, bei der alle Zeilen entfernt wurden, die zu Randwerten gehören (nicht jedoch die entsprechenden Spalten), und u_h^* die Zielfunktion, die über die Nebenbedingung von einem unbekannten Parameter μ_h^* erzeugt wird. Sinngemäß fordert die Aufgabe: Finde einen Parameter μ, der eine Lösung u nah beim vorgegebenen Zielzustand u^* ergibt, dabei aber so glatt wie möglich ist.

Das Lagrange-Funktional zum Multiplikator $p \in \mathbb{R}^{N-1}$ wird durch

$$\mathcal{L}(p, u, \mu) = J(u, \mu) + p^T(A_\mu u - \tilde{M} f)$$

gebildet. Lösungsansatz ist nun die Bestimmung eines Extremums von $\mathcal{L}$. Dies soll durch numerische Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $D_{(p,u,\mu)}\mathcal{L} = 0$ mittels des Newton-Verfahrens erreicht werden. Das resultierende Gleichungssystem für einen Newton-Schritt,

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{pp}\mathcal{L} & \nabla^2_{pu}\mathcal{L} & \nabla^2_{p\mu}\mathcal{L} \\ \nabla^2_{up}\mathcal{L} & \nabla^2_{uu}\mathcal{L} & \nabla^2_{u\mu}\mathcal{L} \\ \nabla^2_{\mu p}\mathcal{L} & \nabla^2_{\mu u}\mathcal{L} & \nabla^2_{\mu\mu}\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta u \\ \Delta \mu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_p \mathcal{L} \\ \nabla_u \mathcal{L} \\ \nabla_\mu \mathcal{L} \end{pmatrix},$$

wird auch KKT-System genannt (nach Karush, Kuhn, Tucker). (In dieser Aufgabe verwendung wir das des ℓ_2-Skalarprodukt, so daß die ersten und zweiten Differentiale mit Gradient bzw. Hessematrix gleichgesetzt werden können.)

a) Bestimmen Sie zunächst symbolisch die Einträge und rechte Seite des KKT Systems. Zu Beginn jedes Newton-Schrittes sollen u und p immer durch Lösung der PDG und ihrer Adjungierten berechnet werden, also $\nabla_{(p,u)}\mathcal{L} = 0$. Eliminieren Sie dann Δu und Δp, so dass ein reduziertes Gleichungssystem $H\Delta\mu = -g(\mu)$ übrig bleibt.

b) Setzen Sie $N = 100$, $(\tilde{M}f)_i \equiv h$ und $\mu_i^* \equiv \frac{1}{10}\sin(2\pi i/N)$. Berechnen Sie u^* durch explizite Invertierung von A_μ.

c) Wählen Sie den Startwert $\mu^0 = 0$ und ein $\gamma = \frac{1}{100}$, und führen Sie das Newton-Verfahren in den μ^k durch. In jedem Newton-Schritt k wird die zu μ^k passende Lösung (u^k, p^k) benötigt. Damit kann das reduzierte System für $\Delta\mu$ mit CG gelöst werden. Implementieren Sie eine zusätzliche Abfrage innerhalb des CG-Verfahrens, die abbricht, wenn der Nenner $\tilde{p}^T H \tilde{p} \leq 0$ ist (hier sei aus Notationsgründen $\tilde{p}$ die Suchrichtung im CG). Wählen Sie eine relative Toleranz von 10^{-6} im CG und ein Abbruchkriterium $\|g(\mu^k)\| \leq 10^{-3}\|g(\mu^0)\|$ im Newton-Verfahren. Dokumentieren Sie, wie sich die beiden Terme in $J(u,\mu)$ im Laufe der Newton-Iteration entwickeln.

Abgabe **Mi 1.2.** und **Do 2.2.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 25.1. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich in 2–3er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 24 + 20 Punkte