Übungsblatt 2.

Abgabe am **Montag, 31.10.2011**
Wegelerstr. 6, Raum 6.017, 9-12 Uhr

Aufgabe 3. (Householder-Reflektion, Givens-Rotation) (16 Punkte)

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegungen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{6}{5\sqrt{3}} & \frac{14}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{9\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} & \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

für A mittels Householder-Reflektionen und für B mittels Givens-Rotationen.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante der Matrizen

$$\begin{aligned} Q_v &= I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} && \text{(Householder-Reflektion)}, \\ G_\phi &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} && \text{(Givens-Rotation)}, \end{aligned}$$

wobei $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $\phi \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 4. (Pseudoinverse, Singulärwertzerlegung) (12 Punkte)

a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lässt sich als $A = U\Sigma V$ mit $U \in O(m)$ und $V \in O(n)$ schreiben, wobei $O(\cdot)$ die orthogonale Gruppe bezeichnet. Weiter hat $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Form

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

(Singulärwertzerlegung, singular value decomposition, SVD). Dabei ist $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$, und die Singulärwerte $s_1 \geq \ldots \geq s_k > 0$ sind eindeutig bestimmt. Definiere nun $\tilde{\Sigma}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ durch

$$\tilde{\Sigma} := \left(\begin{array}{ccc|c} s_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_k^{-1} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

und $B := V^T\tilde{\Sigma}U^T$.

Zeigen Sie, daß B die Pseudoinverse von A ist, indem Sie die Penrose-Axiome

(i) $A^\dagger A = (A^\dagger A)^T$, $AA^\dagger = (AA^\dagger)^T$,

(ii) $AA^\dagger A = A$, $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$,

überprüfen. Zeigen Sie dazu zuerst, dass $\tilde{\Sigma}$ die Pseudoinverse von Σ ist.

b) Zeigen Sie, dass zwei beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ genau dann dieselben Singulärwerte haben, wenn $U \in O(m)$ und $V \in O(n)$ existieren, so dass $A = UBV$ gilt.

c) Geben Sie ein Beispiel von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ an, um zu zeigen, dass im allgemeinen $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$ gilt.

Programmieraufgabe 2. (Pivotisierung) (8 Punkte)

Ergänzen Sie die LR-Zerlegung aus Programmieraufgabe 1 um eine Spaltenpivotsuche. Testen Sie den Algorithmus anhand von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die zerlegte Matrix, die Permutationsmatrix P mit $PA = LR$ und den Lösungsvektor aus.

Programmieraufgabe 3. (QR-Zerlegung) (20 Punkte)

a) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Schreiben Sie ein Programm, das ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mittels QR-Zerlegung und Householder-Transformationen löst. Dabei soll außerdem die aus der Vorlesung bekannte Spaltentauschstrategie verwendet werden. Stellen Sie die Matrix Q nicht explizit auf, sondern speichern Sie die Householder-Vektoren und R effizient durch Überschreiben von A. Dabei muss lediglich ein Vektor, z.B. die Diagonalelemente von R, gesondert abgespeichert werden. Testen Sie den Algorithmus anhand des Beispiels aus Programmmieraufgabe 1. Geben Sie die Matrix bestehend aus Householder-Vektoren und R sowie den Lösungsvektor aus.

b) Offensichtlich ist die exakte Lösung $x = (1, \ldots, 1)^T$. Berechnen Sie die Residuen und die absoluten Fehler Ihrer Ergebnisse des LR- und QR-Verfahrens und vergleichen Sie die benötigte Anzahl der Operationen. Von welcher Komplexität sind die beiden Verfahren?

Abgabe **Mi 9.11.** und **Do 10.11.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`). Ab Mi 2.11. hängt eine Terminliste für diese beiden Tage aus; bitte tragen Sie sich in 2–3er Gruppen ein. Die Liste befindet sich Mo–Mi im CIP-Pool der Wegelerstraße, Do–Fr im CIP-Pool der Endenicher Allee.

Gesamtpunktzahl: 28 + 28 Punkte