Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2011/12
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Jutta Adelsberger, Daniel Wissel

universität bonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Dienstag, 8.11.2011**

Aufgabe 5. (Matrixnormen) (12 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine *Matrixnorm* $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist eine Norm auf dem Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ und erfüllt daher folgende Eigenschaften:

$$\|A\| = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \qquad \textit{(Definitheit)} \qquad \text{(i)}$$
$$\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \qquad \textit{(Homogenität)} \qquad \text{(ii)}$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \textit{(Dreiecksungleichung)} \qquad \text{(iii)}$$

Eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ heißt *induziert* durch eine Vektornorm $\|\cdot\|_V$, falls

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}.$$

Folgende Matrixnormen werden durch die Vektornormen $\|\cdot\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ induziert:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \textit{(Spaltensummennorm)},$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} \qquad \textit{(Spektralnorm)},$$
$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \textit{(Zeilensummennorm)}.$$

Hierbei ist der *Spektralradius* $\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } A \in \mathbb{C}^{n\times n}\}$.

a) Berechnen Sie die Matrixnormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie, dass die *Frobenius-Norm*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

durch keine Vektornorm induziert wird.

c) Geben Sie eine Matrix an, für die alle drei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ identisch sind und für die die Frobenius-Norm identisch 1 ist.

d) Zeigen Sie, dass die Spektralnorm $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$ durch die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ induziert wird.

e) Zeigen Sie, dass der Spektralradius keine Matrixnorm ist.

Aufgabe 6. (Pseudoinverse) (6 Punkte)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m},\ x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zur Lösung von $\|Ax-b\|_2 \to \min$ lässt sich $x = A^\dagger b$ mittels QR-Zerlegung berechnen. Leiten Sie dazu eine Formel für die Pseudoinverse $A^\dagger$ her.

Hinweis: Betrachten Sie die Struktur von $\bar{Q}Ax = \bar{Q}b$ mit $\bar{Q} \in O(m),\ R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ invertierbar und $S \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$

$$\left(\begin{array}{c|c} R & S \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right),$$

und formulieren Sie Satz 1.19 der Vorlesung in einem linearen Gleichungssystem. Alternativ können Sie auch Algorithmus 1.22 verwenden.

Aufgabe 7. (Kondition des Eigenwertproblems) (8 Punkte)

Ein gut konditioniertes Problem ist die Bestimmung der Eigenwerte der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Berechnung der Koeffizienten $q(a,b,c) = -(a^2+b^2+c^2)$ und $r(a,b,c) = -2abc$ des charakteristischen Polynoms $P(x) = x^3 + qx + r$ ein gut konditioniertes Problem (bezüglich der relativen Konditionszahlen) ist.

b) Zeigen Sie, dass die Berechnung der Nullstellen $\lambda_1(q,r)$, $\lambda_2(q,r)$ und $\lambda_3(q,r)$ von $P(x)$ hingegen extrem schlecht konditioniert sein kann. Betrachten Sie hierzu die (implizite) Ableitung von $P(\lambda_i(q,r)) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$.

Bezeichnung: Sei $y(x_1,\dots,x_n)$ die zu berechnende Problemstellung. Dann sind die *absoluten Konditionszahlen* $\delta_i = \partial y(x_1,\dots,x_n)/\partial x_i$ und die *relativen Konditionszahlen* $\rho_i = \delta_i x_i / y(x_1,\dots,x_n)$. Die relativen Konditionszahlen stellen die Verstärkungsfaktoren für die relativen Fehler dar und geben somit den unvermeidlichen Verlust an gültigen Dezimalen bei der Berechnung der Problemstellung an. Sind die Konditionszahlen klein, so spricht man von einem *gut konditionierten Problem*, andernfalls von einem *schlecht konditionierten Problem.* Bei schlecht konditionierten Problemen bewirken kleine relative Fehler in den Eingabedaten große relative Fehler in den Ausgabedaten.

Aufgabe 8. (Kondition und Fehlerverstärkung) (12 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahlen $\kappa_\infty(A)$ und $\kappa_\infty(B)$. Dabei ist die Kondition κ einer regulären Matrix A in einer bestimmten Norm über $\kappa_\bullet(A) = \|A\|_\bullet \|A^{-1}\|_\bullet$ definiert.

b) Lösen Sie für die Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \Delta\widehat{b} = \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$$

mit einem kleinen $\delta > 0$ die Gleichungssysteme

$$Ax = b, \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad A(x + \Delta\widehat{x}) = b + \Delta\widehat{b}.$$

Wie wirkt sich der Fehler in den Eingabedaten der rechten Seite auf die Lösung aus? Vergleichen Sie außerdem die jeweiligen Fehler $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ und $\|\Delta \widehat{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ mit der allgemeinen Fehlerabschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

Aufgabe 9. (Tridiagonalmatrizen) (8 Punkte)

Gegeben seien die Tridiagonalmatrizen

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \ N > 1.$$

a) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren von A_N die Gestalt

$$z_k^{(N)} = \left(\sin \frac{\pi k}{N+1}, \sin \frac{2\pi k}{N+1}, \ldots, \sin \frac{N \pi k}{N+1} \right)^T, \ k = 1, \ldots, N$$

haben und $\lambda_k^{(N)} = 2(1 - \cos \frac{\pi k}{N+1})$ die zugehörigen Eigenwerte sind.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_2(A_N)$ sowie konkret $\kappa_2(A_3)$.
Hinweis: Für symmetrisches A gilt $\kappa_2(A) = \frac{|\lambda|_{\max}(A)}{|\lambda|_{\min}(A)}$.

Gesamtpunktzahl: 46 Punkte